EL EMPLEO DE SIMULADORES DIGITALES EN LA CLASE DE CÁLCULO

Modalidad:

Taller Didáctico

Disciplina:

Modelos educativos computacionales para Enseñanza de Matemática

***Autores*:**
Mg. Elsa del Valle Ibarra de Gómez . Facultad de Ciencias Forestales. y Mg. José Ismael Gómez, de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Año 2007

Resumen

El empleo de simuladores digitales en la clase de Cálculo, como en otras asignaturas de matemática y física, permite a los alumnos y profesores una nueva forma de llevar adelante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos del programa, a través de metodologías de trabajo más activa y de mayor participación de los estudiantes en la construcción de los conocimientos. Los simuladores son dispositivos computacionales que permiten reproducir fenómenos semejantes a los que tienen lugar en situaciones reales. Además de esta ventaja, pueden llevar al estudiante a mejorar su proceso de pensamiento complejo, y a favorecer su motivación, por tratarse de recursos tecnológicos que forman parte de nuevas formas culturales. Los simuladores digitales constituyen una herramienta importante, inteligente y poderosa, pero herramienta al fin, en la tarea compleja del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, que no puede suplir la labor del docente en su rol de coordinador y orientador del aprendizaje como tampoco la del alumno, como protagonista principal en el proceso de asignar sentido y comprensión al conocimiento. En el marco del taller se desarrollarán y compartirán experiencias vinculadas con los aspectos de una planificación de clase en un entorno computacional.
Este apunte contiene: fundamentos teóricos, enfoque didáctico, algunas precisiones acerca de Java, prácticos para trabajar en el laboratorio de informática o en su propia computadora, el concepto de multiplicadores de Lagrange con su teorema correspondiente que se puede visualizar a través de diferentes gráficas, para mostrar la potencia de esta herramienta computacional y finalmente la bibliografía.

INDICE

EL EMPLEO DE SIMULADORES DIGITALES EN LA CLASE DE CÁLCULO

Introducción

Los progresos en la ciencia y la tecnología, que se producen a un ritmo constante y vertiginoso, los cambios culturales y sociales, junto al fenómeno de la globalización, constituyen un nuevo panorama en el que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática no puede dejar de estar involucrado.
En ese sentido, el uso de los simuladores digitales en las clases de Matemática se perfila como una opción válida a tener en cuenta, como estrategia de enseñanza complementaria, que puede favorecer un aprendizaje innovador, de tipo significativo y constructivista, y que puede ser empleada también en combinación con otras estrategias, acordes a lo arriba señalado.
Como recursos tecnológicos, los simuladores digitales contribuyen a incentivar al alumno a aprender matemática, fomentan el desarrollo de procesos de pensamientos acordes sobre situaciones complejas y que pueden ser importantes en el uso activo de estrategias de resolución de problemas y actúan como facilitadores del aprendizaje. En un entorno computacional, los estudiantes toman decisiones durante las simulaciones.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Los simuladores digitales son dispositivos que permiten reproducir fenómenos similares a los que tienen lugar en la realidad. Entre las razones que fundamentan el uso de los mismos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, podemos mencionar las siguientes: refuerzan un aprendizaje de tipo constructivo, ya que permiten al estudiante construir su propio conocimiento sin tener que recurrir a una memorización mecánica de las nociones; constituyen un recurso tecnológico que apoya el pensamiento significativo a través de la ejecución de operaciones que permiten a los estudiantes, entre otras cosas, generar y verificar hipótesis y resolver situaciones-problemas; estimulan el comentario, facilitan la integración de los conceptos fundamentales, le permiten al estudiante observar y controlar sus avances, reafirmar o modificar sus ideas, etc.; favorecen el desarrollo de una actitud de confianza en sí mismo, despiertan el interés por adquirir nuevos conocimientos y mejorar su interacción con los docentes, con sus pares y con los instrumentos didácticos. Posibilitan el acercamiento de la matemática, y en nuestro caso, específicamente de los conceptos del Cálculo con los problemas reales.

ENFOQUE DIDÁCTICO

Este taller se sitúa en el marco conceptual del enfoque semiótico antropológico de la Didáctica de la Matemática, en la que el conocimiento no es una copia de la realidad, sino un elemento que emerge de las prácticas eficientes realizadas tanto en el aula como fuera de ella, que tiene que ver fundamentalmente con la resolución de problemas, y que depende de los medios institucionales de que dispone el docente y el alumno.

El uso de simuladores digitales puede servir como herramienta válida en la construcción de ese conocimiento por parte del alumno.
La planificación de una clase de Cálculo en la que se va a emplear simuladores digitales, requiere tener en claro los siguientes aspectos:

- *Motivaciones del empleo de los simuladores digitales*

El empleo de simuladores digitales puede estar motivado por, entre otras razones, las siguientes: el aprendizaje de nociones del Cálculo mediante el empleo de una metodología no tradicional; la búsqueda de una actitud positiva de los alumnos frente a las matemáticas; los objetivos curriculares previstos en la planificación de la asignatura; el aprendizaje en equipo; la posibilidad de un aprendizaje más autónomo por parte de los alumnos y las disponibilidades tecnológicas de la institución.

- *Contenidos a desarrollar*

De los contenidos que forman parte de una asignatura es conveniente seleccionar un grupo de temas para trabajar con la ayuda de simuladores digitales. Esta elección puede ser personal o surgir de un intercambio de ideas en el Departamento Académico. Entre las cosas que pueden influir en esta selección de contenidos están: los objetivos propuestos, el grupo de alumnos con que se va a trabajar, la disponibilidad tecnológica de la institución y los materiales elaborados con que se cuentan. También se puede considerar aquellos temas que sean aplicables a otras asignaturas.

- *Fechas y tiempo de realización*

El empleo de nuevas metodologías y recursos, como la del uso de simuladores digitales en la clase de Cálculo, requiere fijar fechas de realización de la experiencia y la duración de la misma.
Hay que asignar una duración mínima necesaria que le permita al estudiante, un tiempo de familiarización con este recurso y con la metodología de trabajo; y a su vez, que al docente le resulte una experiencia digna de tener en cuenta, tratando de no sobrepasar los tiempos institucionales establecidos para el desarrollo de la asignatura.

- *Aula o laboratorio de informática*

Actualmente casi todas las instituciones educativas disponen de un aula o laboratorio de informática. Es preciso conocer las disponibilidades técnicas de estos ambientes (cantidad de máquinas, capacidad de las mismas, posibilidades de proyección, etc), personal a su cargo y del tiempo que puedan asignarnos para la realización de la experiencia.

- *Programación exhaustiva*

Es importante realizar una programación detallada de la experimentación de modo que todo esté previsto antes de empezar a trabajar con los alumnos en el aula de informática. Para ello es importante preparar con antelación, los recursos que se van a utilizar, guías de trabajo a emplear con los simuladores y materiales de evaluación.
El uso de simuladores digitales, con contenidos previamente seleccionados, implica tener en cuenta algunas estrategias que ayudarán a realizarla y la metodología que es necesario utilizar durante el desarrollo de la misma.

- *Metodología de trabajo e implementación*

Se mencionan a continuación algunas estrategias a tener en cuenta antes de comenzar la experiencia de aprendizaje con simuladores digitales:

- Conviene dedicar un tiempo para explicar a los alumnos en qué va a consistir el trabajo en el aula de informática y para hacerles notar que esa experiencia tiene un fin educativo.
- Es recomendable tener elaboradas Guías de Trabajos Prácticos para ser desarrolladas en el aula de informática. Estas guías pueden ser resueltas en grupo, de modo de facilitar la interacción entre los estudiantes y la tarea de evaluación del profesor. Esto forma parte de un diseño instruccional que puede incorporar la presentación de esta guía como informe de trabajo, que; promueve la participación de los alumnos, permite ejercitar la responsabilidad en cuanto al aprendizaje y entrega de trabajos, facilita la socialización y la posibilidad de una devolución por parte del docente con miras a orientar mejor el proceso de aprendizaje que se está llevando a cabo. Estas guías o informes corregidos, deben ser devueltas a los alumnos de modo que puedan disponer de ellas como herramientas de estudio.
- El profesor interviene explicando y orientando en la realización de los trabajos.
- Una previsión que, si es posible, ayuda al buen funcionamiento de la clase es contar con algún compañero o auxiliar docente que colabore con nosotros. Así uno de los profesores se puede dedicar a resolver las dudas de aprendizaje que surjan sobre las actividades propuestas y el otro a las dificultades informáticas. Puede ocurrir también que uno atienda las dudas particulares y el otro siga de cerca el comportamiento general del grupo.

- *Proceso de evaluación*

La evaluación de la experiencia realizada es importante dado que le permitirá al docente sacar conclusiones sobre la actividad implementada y especialmente sobre los logros alcanzados por los alumnos. Por esta razón, resulta importante realizar una evaluación de la experimentación en el aula desde el punto de vista del profesor y también del alumno.

Una evaluación completa de la experiencia desde los puntos de vista mencionados, debe incluir:

- El informe de experiencias, la realización de una prueba y encuesta finales.
- El análisis de los resultados recogidos de las distintas herramientas de evaluación empleadas: encuesta inicial, evaluación previa, hojas de trabajo, diario de clase, prueba final y encuesta final.
- Una apreciación personal del docente.

En el desarrollo del taller se explicitará el manejo de los simuladores digitales (Applets en JAVA), la forma de crearlos y modificarlos, sin que se requieran mayores conocimientos de programación, con el propósito que puedan introducirlos en sus clases de Cálculo.
Los temas que serán abordados mediante los simuladores digitales, corresponden a algunas nociones de Cálculo, tanto de una variable como de varias variables.
En el marco del taller se irán desarrollando y compartiendo experiencias vinculadas con los aspectos de una planificación de una clase en un entorno computacional, que mencionamos anteriormente.
Este taller surge de nuestra participación como docentes/alumnos en el proyecto Homovidens, el Programa “Profesores para el Futuro” desarrollado por la Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Buenos Aires en colaboración con el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. www.sceu.frba.utn.edu.ar/dav

Acerca de JAVA

JAVA es un lenguaje de programación diseñado e implementado por un grupo personas de la empresa Sun Microsystem.
El término JAVA se refiere a un tipo de café, algo así como lo es para nosotros un capuchino.
Con JAVA se puede escribir aplicaciones, llamadas applets, que pueden incorporarse dentro de los sitios web y ser ejecutadas desde una página base.
Los archivos de los applets son pequeños y transportables, lo que permite que se puedan cargar e integrar con facilidad dentro de una página web.
Los simuladores digitales que se utilizarán permiten que aún, sin ser expertos programadores, puedan ser modificados y crear nuevos simuladores o applets de Java que pueden colocarse en una página web.
Los simuladores son aplicaciones de Java que están insertos en una página web.
Esta página puede ser empleada en forma off-line (en una PC sin conexión a Internet) o bien On-line (a través de Internet).

Instalación del motor Java

Los simuladores son aplicaciones realizadas con Java.
Para ejecutarlas es necesario que nuestra PC posea este software especial llamado **máquina virtual Java.**
Si no se dispone de este soft se lo puede descargar gratuitamente desde la dirección
http://www.java.com

Funcionamiento de los simuladores

Los simuladores dependen de dos motores, llamados Descartes.jar y Descartes3.jar

Este motor es empleado por casi todos los simuladores que utilizan 2 dimensiones.

Este motor es empleado por casi todos los simuladores que utilizan 3 dimensiones, o que son más elaborados en su funcionalidad.

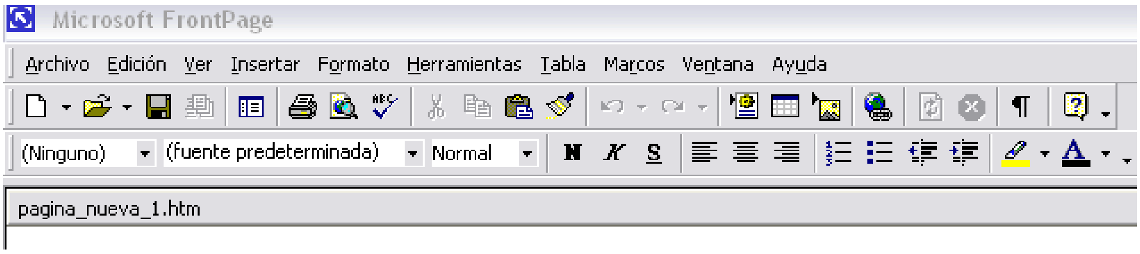
Las páginas web y los motores de Java

Las páginas web están escritas en código HTML y podemos ver su ***código fuente*** desde la lengüeta VER o VEW.
La aplicación de Java comienza y termina con el término **applet,** el resto corresponde al los demás aspectos de una página, tales como: título, color, tamaño de letra, etc.

```
<applet code="Descartes.class"
 codebase=""
 archive="Descartes3.jar"
tipo='num&eacute;rico' id='x' valor='2.0' fijo='no' nombre='x' visible='si' pos_mensajes='centro'">
</applet>
```

Si se observa el término ***codebase,*** se podrá ver que aparece el símbolo **“”**, esto indica que el motor **Descartes.jar**, o **Descartes3.jar**, como en este caso, que aparece en ***archive*** está junto con la página web.

Para diseñar una página web hay que disponer de un editor como **Frontpage.**
Abrimos este editor



Luego de trabajar en esta página, hay que guardarla, por ejemplo, de esta manera:
Taller didáctico.htm o Taller didáctico.html

Ir a la Carpeta donde se guardó la página y se podrá ver el rótulo siguiente:

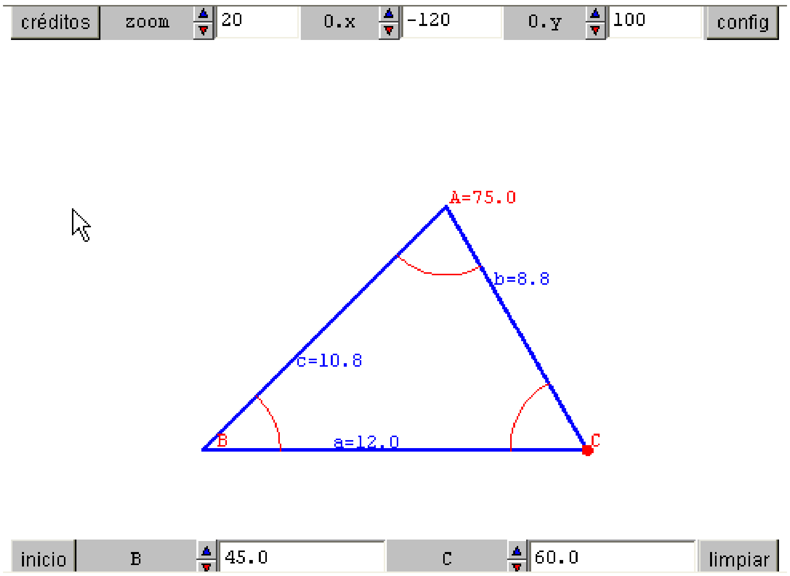
Abrir una carpeta en el disco local (C:) y puede llamarla con cualquier nombre que le se le quiera asignar, por ejemplo: Taller

El motor o los dos motores de Java se pueden insertar en esta carpeta, junto con la página web. Esta es una opción.

Paneles de control

Para realizar las modificaciones en los simuladores se usará una "interfase" que permite que nuestra tarea sea más sencilla. Esta interfase está compuesta por 5 paneles de Control en el motor Descartes y 7 paneles en Descartes3.

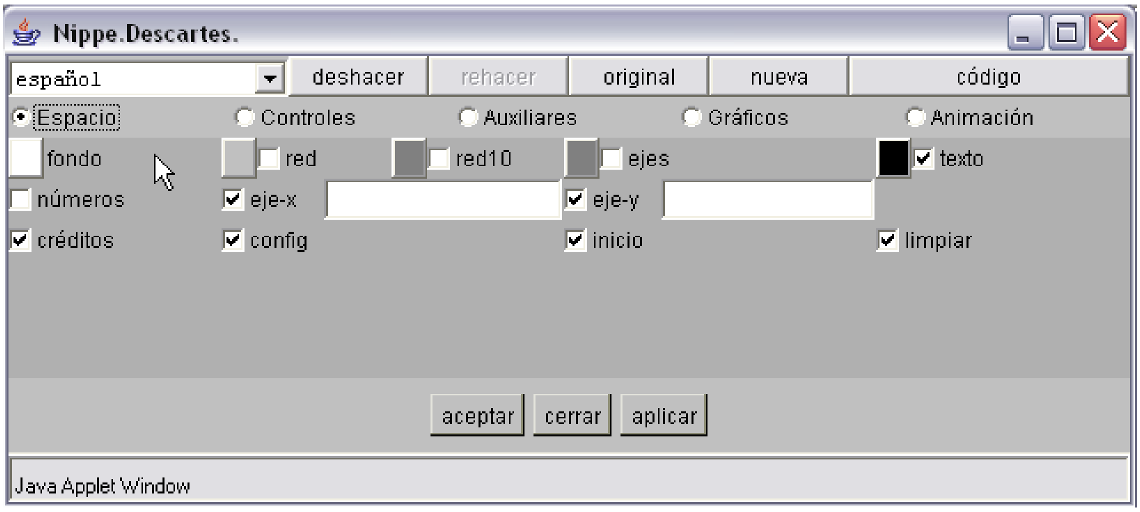
Utilice la página **triángulos.htm**, y dentro de ella se encontrará el simulador (aplicación o applet de Java) con el que se trabajará.



Para activar la interfase deberá hacer doble clic sobre el simulador o clic con el botón derecho del mouse y se abrirá una ventanita desde donde se activa CONFIG.

En la Configuración aparecen los cinco paneles que fueron mencionados anteriormente:

Al activar cada panel de configuración aparecerán opciones específicas al panel seleccionado. A continuación se verán las opciones que surgen al activar el panel **Espacio**



En la parte final se verán tres botones: ***aceptar, cerrar y salir***, que sirven **para salir** de la configuración, de modo distinto: ***aceptar*** significa salir aceptando los cambios y cierra la ventana, ***cerrar,*** significa salir ignorando los cambios y ***aplicar***, acepta los cambios y continúa dentro del panel. Este último botón es el más utilizado.

Para trabajar en el laboratorio

Trabajo Práctico Nº 1
La ubicación de los motores de Java

Objetivo:

Aprender a escribir correctamente el codebase del código fuente del simulador, según la ubicación de los motores de Java.

Actividades:

Para alcanzar el objetivo propuesto, se llevarán a cabo las siguientes actividades:

Actividad 1

Crear una carpeta, que se puede llamar **Desarrollo Taller** y ubicar en ella los motores Descartes y Descartes3.
Ubicar en la misma carpeta una hoja de htm, que puede llamar **Base**.
Observar detenidamente el codebase del simulador, poniendo atención en su estructura.

Actividad 2

Dentro de la carpeta anterior crear una nueva carpeta que puede llamar **Carpeta 1** y en ella copiar la hoja de htm que se llamó Base.
Los motores quedan en la carpeta anterior que se identificó como Desarrollo Taller.
Ahora para que pueda funcionar el simulador deberá ir al código fuente mediante alguna de las opciones siguientes:

Opción 1
En la página web llamada Base clickee con el botón derecho del mouse y marque en "**abrir block de notas**", esto le permitirá llegar al código fuente y en codebase. Ahora escribir **"../".** De esta manera se indica que los motores están un nivel arriba de donde está la página llamada Base. Luego abra esta página y actualice el cambio realizado pulsando la etiqueta **Actualizar**. Luego verifique si funciona el simulador.

Opción 2
Abra la página web llamada Base y observe que el simulador no funciona. Abra la etiqueta View o Ver y vaya a la parte inferior donde dice **Código fuente**. Una vez en el código fuente, corrija el codebase como en la opción anterior. Luego en **archivo** ponga **guardar.** A continuación **Cerrar y actualizar** estos cambios pulsando la etiqueta **Actualizar** que aparece en la parte superior y a la izquierda de la pantalla. Nuevamente verifique si el simulador funciona.

Actividad 3

Dentro de la carpeta **Carpeta 1** cree una nueva carpeta que puede llamar **Carpeta 2** y copie allí la página web llamada Base.
Los motores se mantienen en la primera carpeta llamada Desarrollo Taller. Verifique que el simulador no funciona. Para que pueda andar el simulador en la carpeta 2, debe seguir alguna de las opciones anteriores y una vez que se está en el código fuente, corrija el codebase escribiendo **“../../”**, para indicar que los motores están dos niveles más arriba.

Trabajo Práctico Nº 2

Análisis de un simulador y su posterior modificación

Objetivo:

Familiarizarse con la estructura de un simulador y aprender a modificarlo.

Actividad 1

Se trabajará con la hoja Base.htm que se encuentra en Carpeta 1.
Este simulador contiene una parábola.
Realizar el dibujo de la curva que está en el simulador en una hoja y consignar sus elementos.

Actividad 2

Analizar el simulador de la siguiente manera:
Pulse en configurar y comience en Controles.
Allí aparecerán los siguientes elementos que se deberá consignar en una hoja para luego cambiarlos, según corresponda, cuando se quiera hacer una nueva parábola.

- **Controles**

Escala (numérico)
Ox (numérico)
Oy (numérico)
p (numérico)
x (numérico)

- **Auxiliares**

FP(variable)= sqrt(x^2+(p-x^2/(4*p))^2)

Trate de escribir estas fórmulas en notación matemática.

PD(variable)= p+x^2/(4*p)

- **Gráficos**

ecuación y=x^2/(4*p)
ecuación y=-p
punto [0,p]   texto F
punto [x,-p]   texto D
punto [x,x^2/(4*p)]   texto P
segmento [0,0][x,0] texto x=[x]
segmento [0,0][0,p] texto p=[p]
segmento [0,p][x,x^2/(4*p)] texto FP
segmento [x,x^2/(4*p)][x,-p] texto PD
texto [10,20] texto Parábola con eje vertical
vértice en el origen
y concavidad hacia arriba
texto [10,240] texto FP=[FP]\nPD=[PD]

Actividad 3

En esta actividad, también en una hoja, realice los cambios que correspondan a los efectos de obtener una parábola con eje horizontal y concavidad hacia la derecha y luego ingrese estos datos en el simulador.

¿Cómo se trabaja en esta última parte?

Pulse en la parte que se quiere agregar sentencias, ya sea Control, Auxiliares, Gráficos, etc; luego, en el rectángulo de edición que está a la izquierda del panel de configuración, pulse la tecla **“+”** y agregue el elemento que se quiere incorporar a la escena. Se dan las características de este elemento y se pulsa **aplicar.**
Una vez realizado todos los cambios, ir a la etiqueta **Código** que está en la parte superior derecha del panel de configuración; seleccione todo el texto apretando la tecla derecha del mouse; pulse **copiar,** cierre la configuración, vaya al código fuente que está en la etiqueta Ver de la página donde está trabajando y apriete pegar. Luego, guarde con el nombre que le quiera dar. Ubique esta página, ábrala y verifique que se tiene un nuevo simulador.
Para **eliminar una sentencia**, se aprieta la tecla **“-“** que está en el rectángulo de edición y pulse **aplicar.**

Trabajo Práctico Nº 3

Límite y continuidad 1

Objetivos:

Adquirir habilidad en la construcción de una función definida a trozos mediante un simulador.

En esta escena se ensayará la construcción de una función definida a trozos definida por el estudiante.
Para ello: cambie, en la parte inferior, el valor 0 que aparece en la expresión **y=a(x)*(0)** por la expresión que crea conveniente; y lo mismo en **y=b(x)*(0)**. Cada vez que se cambie el valor de 0 deberá pulsar la tecla **Intro o enter**. No tiene gracia sustituir 0 en las dos sitios con la misma expresión. Por ejemplo, se puede sustituir 0 por **-3*x-2** en y=b(x)*(0) y por 3*x+2 en la primera ecuación.

Actividades

Escribir la ecuación de una función:

- 1.- La función f definida a trozos que tenga una discontinuidad evitable en x=-1, sabiendo que f(-1)=2.
- 2.- La función g definida a trozos que sea continua en *x=-1*, sabiendo que *g(-1)=2*.
- 3.- La función *h* definida a trozos que tenga una discontinuidad de salto (finito o infinito) en *x=-1*, sabiendo que *h(-1)=2*

Luego ensaye con ellas según las instrucciones dadas al principio de este práctico.

Trabajo Práctico Nº 4
Límite y continuidad 2

Objetivo:

- Ensayar la construcción de un simulador de una función definida a trozos donde se deberán encontrar valores de algunos parámetros.
- Analizar, modificar y ejecutar dicho simulador

Considere ahora la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si \quad x<-2 \\ k & si \quad x=-2 \\ x^2+2x-1 & si \quad -2<x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$$

En la siguiente escena está representada la función para *a=0*, *b=0* y *k=1*. Se quiere hallar *a*, *b* y *k* para que sea continua en todos sus puntos. Se puede hacer el **cálculo con lápiz y papel** primero y luego constatar en el simulador.

Luego de trabajar con el simulador realice la siguiente:

Actividad: análisis del simulador y luego construcción para una función similar.
Sugerencia de trabajo:

a) Determine los valores de k que hagan a la función continua en todo número b) Utilice Descartes para obtener la gráfica de la función resultante.

$$f(x)=\begin{cases} kx-1 & si \quad x\le 2 \\ kx^2 & si \quad 2<x \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} kx-3 & si \quad x\le 3 \\ x^2-kx & si \quad x>3 \end{cases}$$

Trabajo Práctico Nº 5
Tangente y derivada

Objetivo:

Se pretende que el alumno-asistente cree una página utilizando el front page e incorporando actividades y simuladores aplicados a la noción de tangente y derivadas

Actividad: elaboración de una página html

Observar detenidamente una página ya elaborada por un docente.
Como sugerencia, se puede elaborar una Guía de Trabajos Prácticos.

- Abra una página nueva mediante el programa Frontpage.
- Consigne en ella los siguientes elementos:

- Carrera
- Asignatura
- Curso
- Guía de Trabajos Prácticos
- Título del tema

Nota: Conviene utilizar distintas fuentes, tamaños de letras y colores.

- Para indicar en la página el lugar que va a ser ocupado por un simulador- que ya está creado- ir a Insertar, luego en Avanzadas elegir Subprograma Java y escribir, por ejemplo: Taller Didáctico; luego Descartes; y en nombre poner simulador 1.
  Repetir el procedimiento y escribir en nombre, simulador 2, simulador 3, etc, según el número de simuladores que va a tener la hoja.
- *Finalmente escribir el nombre de la página.*
- **Guarde** la página con el nombre **Guía de Trabajos Prácticos. htm**
- **Cierre** esto y abra la página recién creada. En **Código fuente,** reemplace el párrafo que tiene al comienzo y al final la palabra <applet> y pegue allí el simulador 1, luego haga lo mismo con el 2, etc. **Guarde** esto y **cierre**. Finalmente **actualice** los cambios realizados y observe la página elaborada.

Trabajo Práctico Nº 6

Cálculo Integral

Objetivo:

Analizar y estudiar el funcionamiento de un simulador para obtener las primitivas de una función**.**

Actividad 1

Analizar el simulador Trabajo Práctico Nº 6. Primitivas de una función.
Mencionar los elementos que allí aparecen.
Indicar qué cosas realiza este simulador.

Actividad 2

1.- Considere la siguiente función

$$F(x) = \frac{x^2}{4} + C$$

a) Calcule manualmente su derivada y escriba como $dF(x)$
b) Escriba la ecuación de la recta tangente en la forma $tF(x)$

2.- Para construir el simulador, siga las instrucciones que aparecen a continuación:
* Abra la página Base.htm y agregue las modificaciones que figuran a continuación. Luego vaya a **config,** pulse **aplicar** y con el botón izquierdo del mouse **copie** el texto seleccionado. **Cierre** config y en la etiqueta **Ver** de la página Base.htm ir a **Código fuente**, **pegar** lo que se tiene copiado y **guarde** con el nombre de Trabajo Práctico en la carpeta donde está trabajando. Se habrá obtenido un nuevo simulador.

Controles	Escala (numérico)	Ox (numérico)	Oy (numérico)	x0 (numérico)	C (numérico)
Valor	32	0	0	-5	-3
Nombre	zoom	Ox	Oy	x0	C
Decimales	4*(escala<10)	0	0	2	2
Región	norte	norte	norte	sur	sur
Incr	8	32	32	0.1	0.5
Min	8	-	-	-	-
Max	1000000	-	-	-	-
Visible	si	si	si	si	si

En **Auxiliares**, agregue como **función**, $F(x),\ dF(x),\ tF(x)$, con sus fórmulas correspondientes.
En **Gráficos,** ingrese como **ecuación,** las fórmulas de $F(x),\ dF(x),\ tF(x)$ de la siguiente manera:
$y = F(x)$, $y = dF(x),\ y = tF(x)$,con **distintos colores** y además, los siguientes elementos:

Gráficos	Fórmula	Tamaño	Ancho	Texto	Decimales
Segmento	[x0,F(x0)][x0+1,F(x0)]	2	1	1	2
Segmento	[x0+1,F(x0)][x0+1,tF(x0+1)]	2	1	[dF(x0)]	2
Segmento	[x0,0][x0,dF(x0)]	2	1	F´([x0])	2
Punto	[x0,0]	2	-	x0=[x0]	2

Con **distintos colores.**

Actividad 3

Realice una tarea similar para obtener las primitivas de una función potencial como se describe a continuación:

Introduzca la función $f(x) = a * x^n$ con el propósito de hallar la primitiva $F(x) = \dfrac{a}{n+1} * x^{n+1} + C$ siendo C una constante que depende de los valores de x y de $F(x)$.
Construya el simulador de la siguiente manera:

Espacio:

Controles

Controles numéricos

Control numérico	escala	O.x	O.y	a	n
valor	24	0	0	1	1
nombre	zoom	O.x	O.y	a	n
decimales	4*(escala<10)	0	0	0	0
región	norte	norte	norte	sur	sur
incremento	4	32	32	0.1	0.1
mínimo	8				
máximo	1000000				
visible	si	si	si	si	si

Controles gráficos

Controles gráficos	X0	P
pos	[-5,0]	[1,0]
tamaño	4	4
constricción	y=0	
texto		P
decimales	2	2

Auxiliares

Funciones

$$f(x) = a * x^{n}$$

$$i(x) = a * x^{(n+1)} / n + 1$$

$$pf(x) = i(x) - i(P.x) + P.y$$

$$tf(x) = f(x0.x) * (x - x0.x) + pf(x0.x)$$

Gráficos

Ecuación $y = tf(x)$ ancho 1
Punto [x0.x,f(x0.x)] tamaño 2
Punto [x0.x,0] tamaño 2 texto x0=[x0.x]
Segmentos (3)

[x0.x,pf(x0.x)][x0.x+1,pf(x0.x)]
Tamaño 2, ancho 1, texto 1, decimales 2

[x0.x+1,pf(x0.x)][x0.x+1,tf(x0.x+1)]
Tamaño 2, ancho 1, texto [f(x0.x)], decimales 2

[x0.x,0][x0.x,f(x0.x)]
Tamaño 2, ancho 1, texto F´([x0.x]), decimales 2

Curvas (2)
[t,f(t)], parámetro t, intervalo [-6,6], pasos 500

[t,pf(t)], parámetro t, intervalo [-6,x0.x], pasos 500

Texto (4)
[1+ind((x0.x<5)|(n=-1))*10000,35], texto: La función hallada es

[1+ind((x0.x<5)|(n=-1))*10000,50], texto:
F(x)=([a/(n+1)])x^([n+1])+([-i(P.x)+P.y])

[1,5], texto: La función introducida es

[1,20], texto: f(x)=([a])x^([n])

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

INTRODUCCIÓN

El método de multiplicadores de Lagrange está vinculado a la resolución de problemas de optimización de campos escalares sujetos a restricción de las variables. Se tomarán, en particular, funciones reales de un vector de dos variables o campos escalares de dos variables, que están condicionados por una función de dos variables.
En el curso anterior (Cálculo I) se resolvieron ejercicios para determinar extremos de una función escalar de variable real, de tipo independiente o libre, cuando la función o problema a resolver no tenía ninguna restricción; y también se resolvieron problemas de optimización con restricción, o dependiente. En este caso, el método de resolución consistía en despejar una de las variables en la ecuación de condición y reemplazar en la función dada, de modo de tener una función en una sola variable y resolver la situación aplicando, entre otras cosas, los criterios de determinación de extremos relativos para funciones de una sola variable. Ahora se resolverá este tipo de situaciones problemas, empleando el método de multiplicadores de Lagrange. Antes, se hará un repaso de las nociones de superficies cuádricas y de curvas de nivel, dado que los multiplicadores de Lagrange para funciones de dos variables están íntimamente vinculados a estas nociones, en especial, la de curva de nivel.
Este tema está orientado a los alumnos que cursan Cálculo II de las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

OBJETIVOS

- Visualizar algunas superficies cuádricas y curvas de nivel para distintos valores de la variable z.

- Identificar, a través de los simuladores, los puntos (x,y) sobre la curva correspondiente a la función restricción donde la función principal tiene extremos.

- Interpretar gráficamente los resultados obtenidos empleando el método de multiplicadores de Lagrange.

- Aproximar las soluciones del problema a partir de la observación en el simulador, de las curvas de nivel de la función principal y la curva correspondiente a la función condicionante.

- Adquirir habilidad en la resolución de problemas de optimización en un ambiente computacional.

SUPERFICIES Y CURVAS DE NIVEL

Se comenzará recordando que la gráfica de una ecuación en tres variables es una superficie en el espacio tridimensional.
Una superficie es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación, como vemos en la figura inferior.
Se consideraron, hasta ahora, cuatro tipos especiales de superficies:

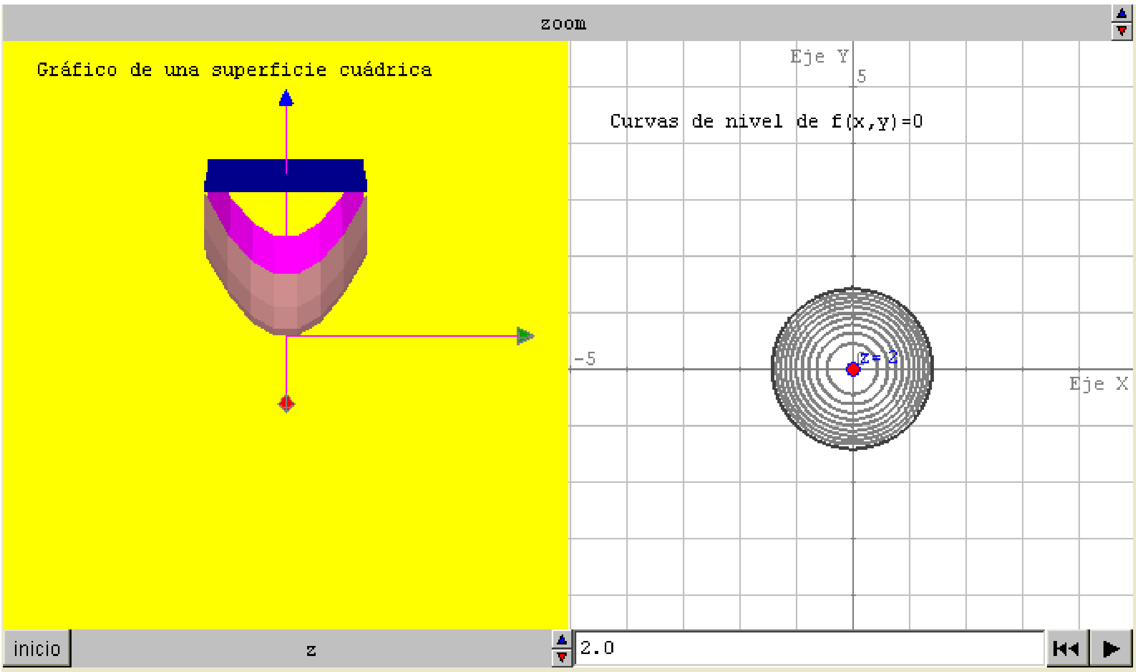
Planos
Esferas
Cilindros
Cuádricas

Considere posteriormente las funciones reales de varias variables, llamadas también campos escalares, en particular, las de dos variables. Recuerde que una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un cierto conjunto D, un único número real que se indica por $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su imagen es el conjunto de valores que toma f.
Las curvas de nivel representan un método para visualizar funciones, empleado por quienes hacen mapas. Las curvas de nivel son mapas de contornos, en los que se unen puntos de elevación constante.

Definición:

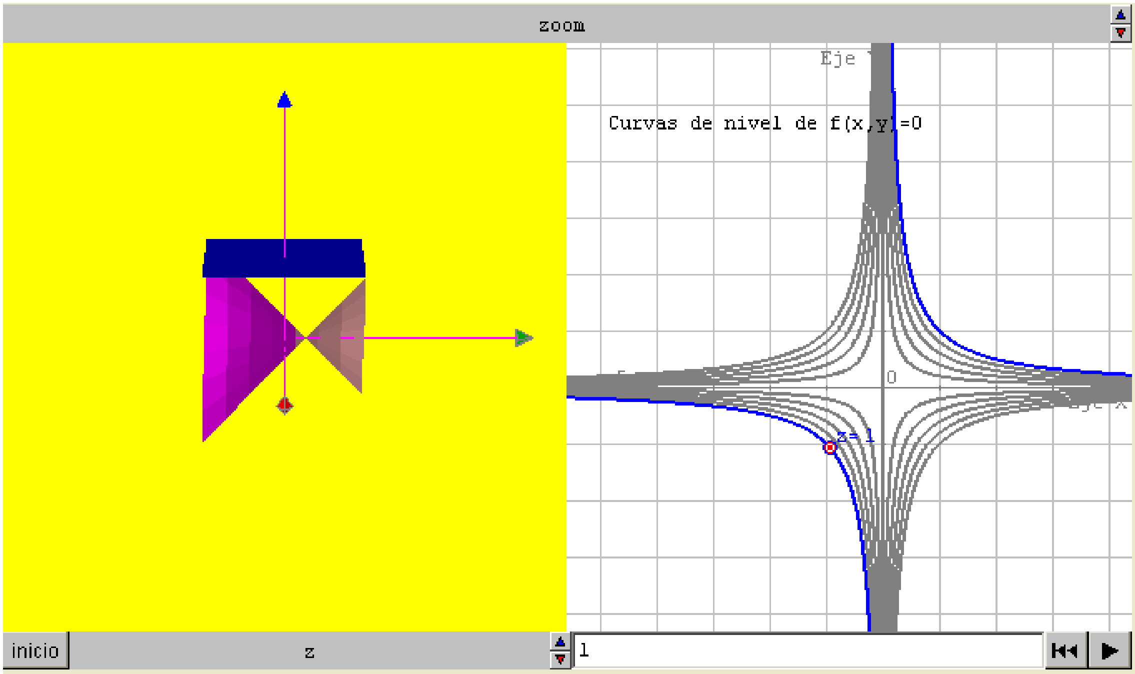
Las curvas de nivel de una función f de dos variables son las curvas con ecuaciones $f(x, y) = k$, donde k es un número real fijo o constante, que está en el recorrido de la función.
Se presentan a continuación, tres ejemplos donde se muestran las superficies cuádricas y las curvas de nivel asociadas a funciones definidas por la ecuación cuádrica de la superficie dada.

Primer ejemplo



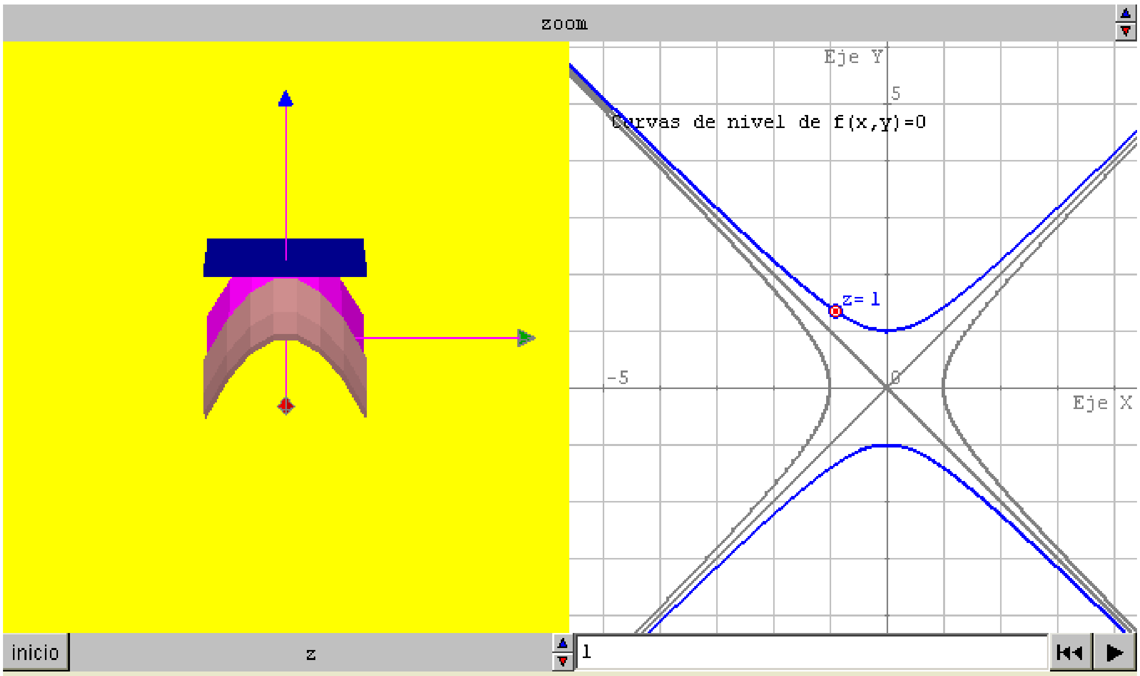
Se puede observar cómo a medida que sube o baja el plano paralelo al plano coordenado z, para valores determinados de z, se van generando curvas de nivel, cuyo valor de z aparece en cada curva.

Segundo ejemplo



Recuerde que las superficies cuádricas se pueden considerar como extensión al espacio tridimensional de algunas nociones que se vieron anteriormente, tales como las secciones cónicas o cónicas. Las curvas de nivel que se obtienen son cónicas que surgen de la intersección de un plano paralelo al plano xy, para ciertos valores de z, con la superficie cuádrica considerada.

Observe el tercer ejemplo:



Pinchando en la parte de la izquierda, donde aparece la superficie y el plano que lo secciona, manteniendo la tecla de la izquierda del mouse y desplazando el mouse por distintos puntos, se podrá ver la superficie y el plano desde distintos ángulos.

TEOREMA DE LAGRANGE Y MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Primero se recuerda el teorema de Lagrange, para funciones de dos variables, cuya demostración se vio en clase.

Teorema de Lagrange

Supóngase que f y g tienen derivadas parciales continuas y que f tiene un extremo en el punto $P=(x_0, y_0)$ sobre la curva lisa o suave de restricción $g(x,y)=c$.

Si $\nabla g(x,y) \neq \vec{0}$ existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \, \nabla g(x_0, y_0)$

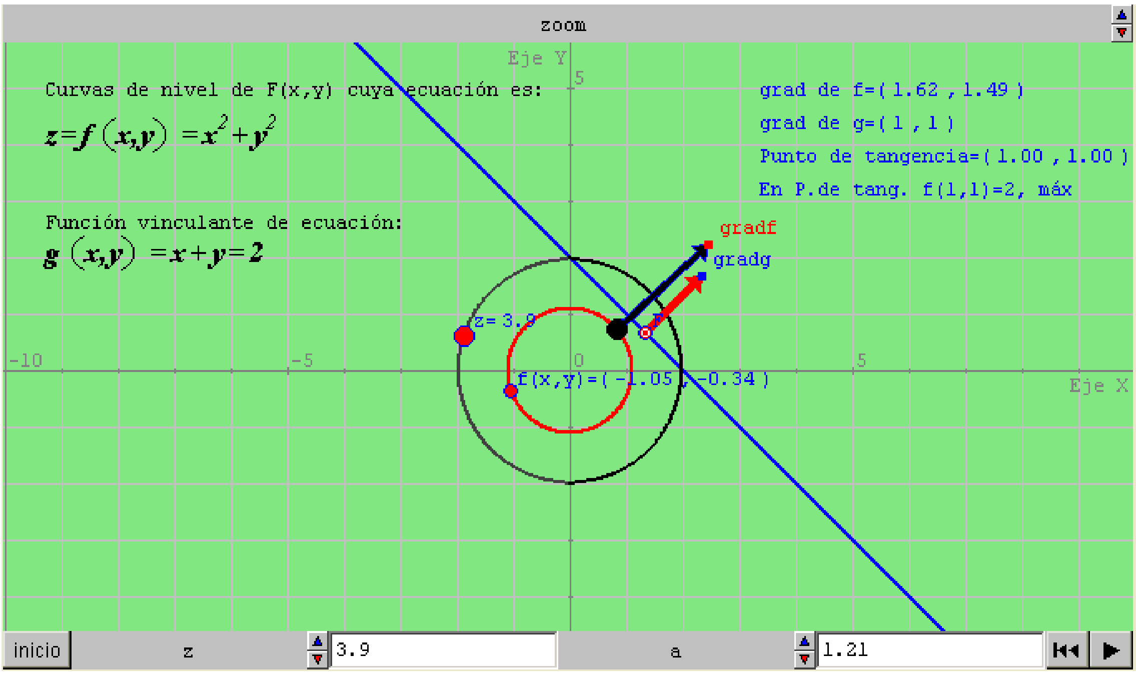
Se consigna a continuación el **Método de multiplicadores de Lagrange.**
Es conveniente recordar que se está trabajando con funciones f y g que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange y por ende, $f(x,y)$ tiene en $P=(x_0,y_0)$ un extremo restringido por la condición $g(x,y)=c$. Entonces, para encontrar los valores extremos se trabajará de la siguiente manera:

1º. Resolver el sistema de tres ecuaciones:

$$f_x(x,y)=\lambda\ g_x(x,y)$$
$$f_y(x,y)=\lambda\ g_y(x,y)$$
$$g(x,y)=c$$

Los valores mayor y menor son el máximo y el mínimo de f, respectivamente, sujetos a la condición fijada.

Ejemplo 1



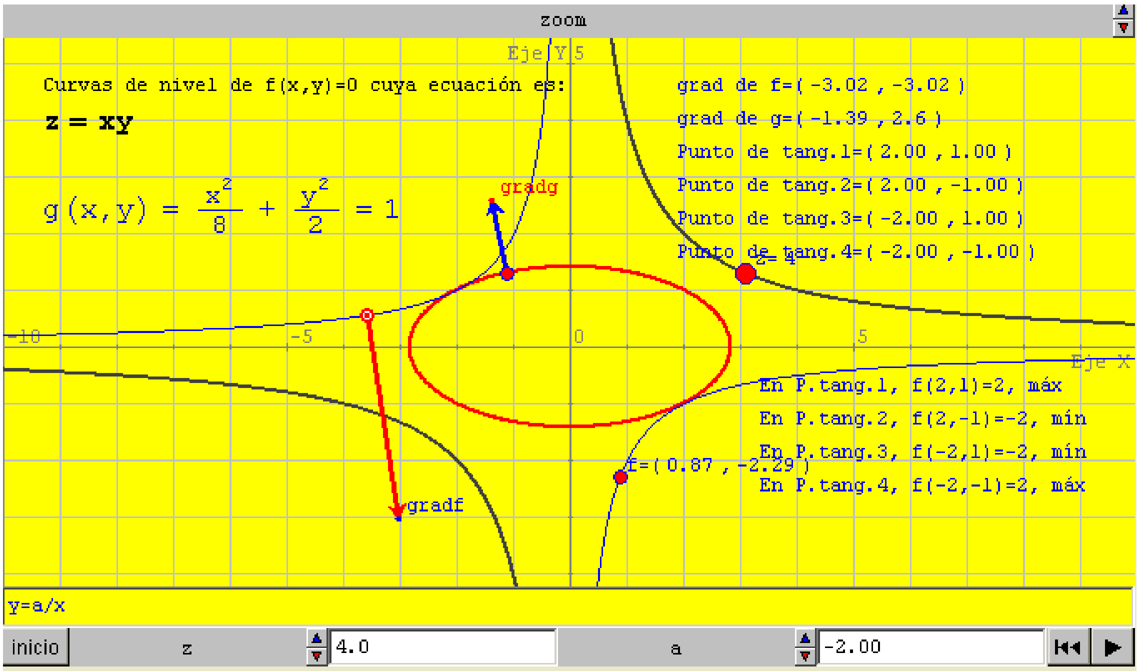
Primero, pinche en el centro del origen del sistema con la tecla izquierda del mouse y de esa manera desplace el punto que indica la curva de nivel de color negro.
Luego, aumente el valor de "a" para poder visualizar una de las curvas de nivel de la función f. Vuelva a hacer click en el centro para obtener el vector gradiente de f. Con la tecla izquierda oprimida y ubicada en el origen del vector gradiente de f, se lo traslada hasta el punto donde los vectores gradientes son paralelos. Esto forma parte de la interpretación geométrica del teorema de Lagrange.

El punto $(x.y)$ de tangencia entre la curva de nivel de f y la curva correspondiente a la función condicionante g, es el punto donde los vectores gradientes son paralelos, de igual o de sentido contrario. Es el punto de la curva de g, donde la función f alcanza su valor extremo, máximo o mínimo.

Actividad

Realice los cálculos con lápiz y papel y coteje con lo que aparece en pantalla, tanto del ejemplo 1 como del ejemplo 2.

Ejemplo 2



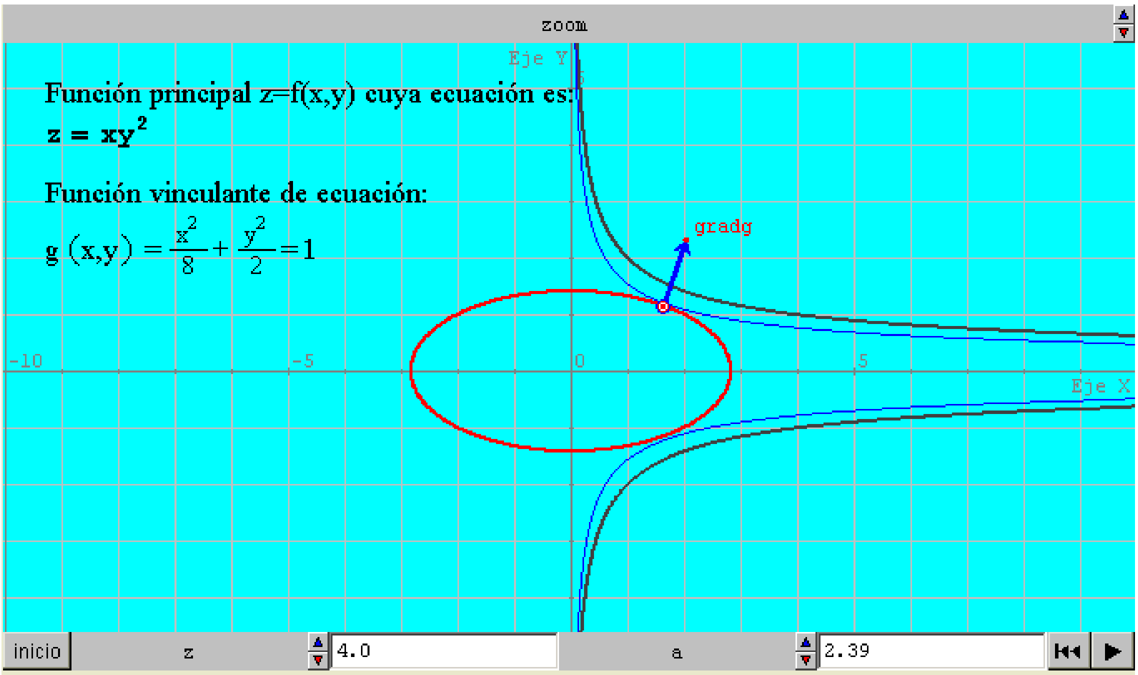
Luego de proceder como en el primer ejemplo, asigne a "z" valores negativos para poder ver los otros dos puntos donde la función f alcanza los valores extremos.

PROBLEMA PROPUESTO

En los dos ejemplos anteriores; la tarea ha consistido en visualizar las curvas de nivel de f, la curva de g, los puntos de tangencia de las curvas de ambas funciones y los vectores gradientes. El alumno podría haber resuelto el ejercicio con papel y lápiz y comprobado la solución que aparece en la ventana computacional.

Ahora, a partir de la observación del punto de tangencia y del paralelismo de los vectores gradientes, se invita al alumno a conjeturar acerca de la o las soluciones a un problema de optimización, cuyas funciones se presentan en el applet.

Luego de haber realizado esto, puede posteriormente resolver el problema aplicando el método de Lagrange, con lápiz y papel, y corroborar sus conjeturas. El objetivo de este ejercicio responde a la actividad de emplear la interpretación geométrica del teorema para que a partir de allí se pueda obtener en forma aproximada las soluciones del problema.



No olvide darle valores a la variable "a" y valores positivos y negativos a la variable "z" para poder encontrar los puntos de tangencia de la curva de nivel de f y la curva de g. Ahora resuelva el problema con lápiz y papel y confronte esos resultados con los que se ha deducido a partir de la observación de los puntos de tangencia.¡Suerte!.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Creemos que el encuentro que tendrás ahora con estos dos ejercicios de auto evaluación serán de gran interés para vos. El primer ejercicio es simple; no así el segundo; que se presta para jugar un poco con la máquina y para valores de las variables “a” y “b”, que pueden ser iguales o distintos

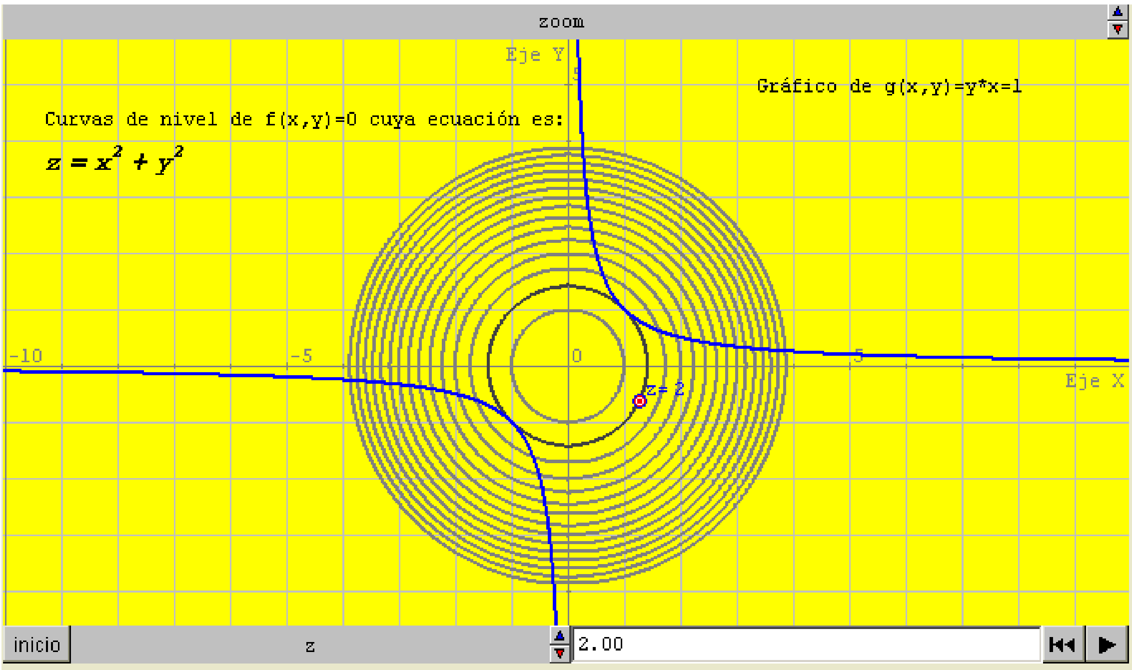
Primer ejercicio

a) ¿A qué superficie cuádrica corresponden las curvas de nivel de f ?

b) ¿Están dadas las funciones que aparecen en pantalla y debes determinar para qué valor de se produce el o los puntos de tangencia de las curvas de f con la de g?.

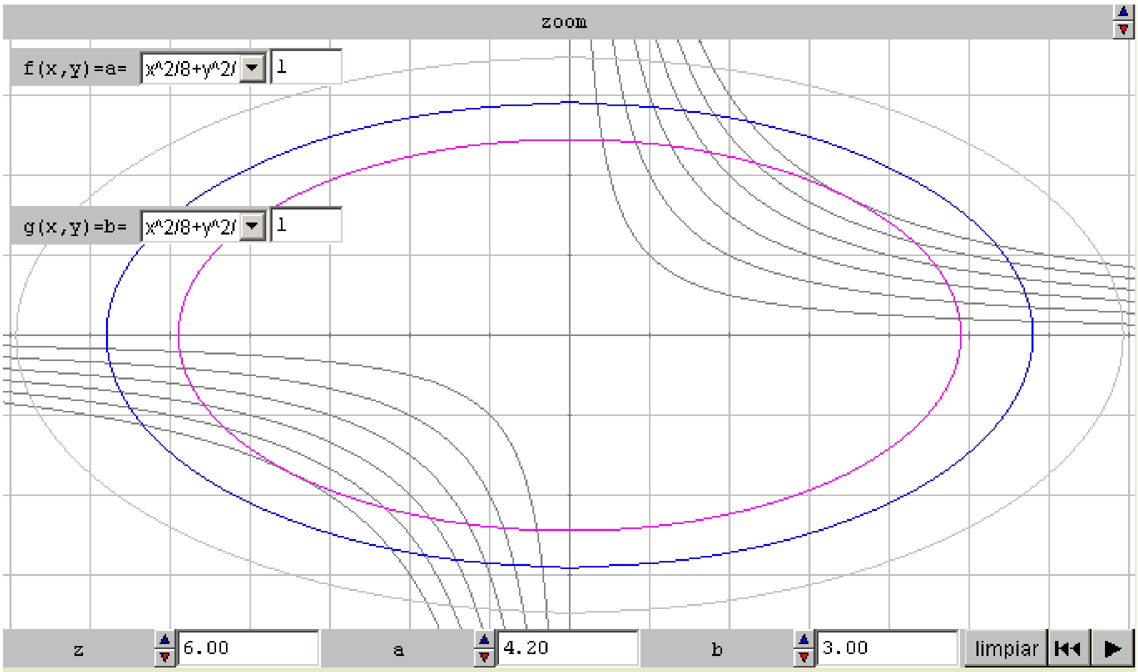
c) ¿Para qué valor de x e y ocurren estos puntos de tangencia?

d) ¿Qué ocurre con la función f en estos puntos de tangencia? Comprueba esto resolviendo el ejercicio, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange, con lápiz y papel.



Segundo ejercicio

La pantalla muestra una función $f(x,y)=a$ que tiene un menú de tres ecuaciones y otra función $g(x,y)=b$ con las mismas ecuaciones que f. Puedes combinar una de las ecuaciones de f con otra de g; variar los valores de a y de b; y ver; en los casos en que existan; los puntos de tangencia de las curvas de f con la curva de g. ¿Qué conclusiones puedes elaborar a partir de estas situaciones; tanto en las que existan estos puntos como en aquellas en las que no se dé esta posibilidad?



No olvides usar con frecuencia el botón de limpiar para tener nuevas gráficas y que no queden rastros de la situación anterior, así la pantalla se ve más clara con las nuevas ecuaciones. Gracias por tu atención brindada. Comprueba los resultados resolviendo los ejercicios siguiendo el método de multiplicadores de Lagrange, con lápiz, papel (y borrador).

Bibliografía

Almiña, J; Curatolo, V. (2006) Homovidens. Profesores para el futuro. Programa de capacitación. Uso de simuladores digitales y creación de material educativo multimedia. Facultad Regional de Bs. As.

De Guzman, M. (1994) Programas de ordenador en la Educación Matemática. Vela Mayor. Revista de Anaya Educación, 3,33-40.

De Guzman, M. (1991) Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la Matemática. Publicado en Manuel Abellanas y Alfonsa (Eds.) Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad. Pp. 9-27.

Gonzalez Vega, L.(2006) Las matemáticas: lenguaje y herramienta de la tecnología. Publicado en La Nueva España. Editorial Prensa Asturiana.

Riveros, V; Mendoza M.I. (2006) Bases teóricas para el uso de las TIC. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad de Zulia.