UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

FACULTAD DE AGRONOMIA Y AGROINDUSTRIAS

ÁLGEBRA

para Ingeniería en Alimentos adaptada al Ciclo común Articulado (CCA)

MATEMÁTICA I

para Licenciatura y Profesorado en Química

Lic. Josefa Sanguedolce

Lic. Maria Luisa Ávila

Dra. Lucrecia Lucía Chaillou

2008

Sanguedolce, Josefa
Álgebra para Ingeniería en Alimentos adaptada al Ciclo Común Articulado (CCA), Matemática I para Licenciatura y Profesorado en Química / Josefa Sanguedolce ;
María Luisa Ávila de Busso ; Lucrecia Lucía Chaillou. -
1a ed. - Santiago del Estero : Lucrecia, 2008.
CD-ROM.

ISBN 978-987-1375-45-5

1. Algebra. I. Ávila de Busso, María Luisa II. Chaillou, Lucrecia Lucía III. Título
CDD 513

Título: Álgebra para Ingeniería en Alimentos adaptada al Ciclo Común Articulado (CCA), Matemática I para Licenciatura y Profesorado en Química

Autor: Sanguedolce, Josefa
María Luisa Ávila de Busso
Lucrecia Lucía Chaillou

1ª EDICIÓN

ISBN: 978-987-1375-45-5

Queda hecho el depósito que establece la Ley 11.723

.LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA

Lucrecia
Editorial

Indice

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

FACULTAD DE AGRONOMIA Y AGROINDUSTRIAS

ÁLGEBRA - MATEMÁTICA I
Ingeniería en Alimentos, Plan 1998 adaptado al CCA
Licenciatura y Profesorado en Química

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Ingeniería Agronómica

Notas sobre

Polinomios – Ecuaciones - Acotación

Lic. Josefa Sanguedolce

Colaboran: Lic. Maria Luisa Avila
Dra. Lucrecia Lucía Chaillou

2008

El objetivo de estas notas es el de servir de guía en el aprendizaje sobre el tema de Polinomios del programa vigente de las asignaturas: Algebra, Algebra y Geometría Analítica y Matemática I correspondientes al ciclo básico de las carreras de Ingeniería en Alimentos, Agronómica, Licenciatura y Profesorado en Química de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Lic. Josefa Sanguedolce

"Toda nuestra vida moderna está como impregnada de matemática. Los actos cotidianos y las construcciones de los hombres llevan su sello y hasta nuestras alegrías artísticas y nuestra vida normal sufren su influencia".

Paul Montel

Al plantear en términos matemáticos situaciones como:
"¿A qué tasa crece una población de bacterias en un cultivo de $2.8x10^5$ individuos hasta 6.1×10^5 en dos horas?, si la formula para un número de N bacterias después de dos horas es $N=P_0\,(1+r)^2$ donde P_0 es la población original del cultivo y r es la tasa de crecimiento horaria, se hace necesario la determinación de los valores para los cuales se anula la función que las representa.

Es frecuente encontrar este tipo de planteos en diferentes áreas, física, ingeniería, biología, economía, etc., que requieran la determinación de los ceros de una función.

Estudiar los ceros (raíces) de funciones polinomiales tiene un gran interés por lo menos por las dos razones siguientes:

- No es posible resolver el problema para funciones más generales si no se logra resolver para este caso más sencillo.
- Muchas veces es posible traducir de alguna manera el problema original de hallar ceros de una función cualquiera al de calcular las raíces de ciertos polinomios (que "aproximan" a la función original).

I-1: Función Polinómica

Notaciones

Denotaremos por K a algunos de los siguientes conjuntos: $\mathbb{Z}$ (enteros), $\mathbb{Q}$ (racionales), $\mathbb{R}$ (reales) y $\mathbb{C}$ (complejos)

Polinomios en una Indeterminada

Definición:

Un polinomio sobre un cuerpo K es una función P definida sobre K **,** con valores en K y cuyo valor para cada *x* es el número $P_n(x)$ dado por la expresión

$$P_n(x) \overset{def}{=} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{n-k} \qquad \text{O bien} \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k$$

Donde:

n es un entero no negativo

a_k, con $k = 0,1,...,n$ son elementos de K fijos, llamados coeficientes, con $a_0 \neq 0$

a_0 se denomina coeficiente director

a_n se denomina termino independiente

Denotemos por $K[x]$ al conjunto de polinomios en la variable x, con coeficientes en K, esto es:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \in K[x] \Leftrightarrow a_k \in K; k = 0, 1, \cdots, n$$

Consideraciones

Recordemos que:

- $P_n(x) \neq 0, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$

Si $a_0 \neq 0$, decimos que el grado de $P_n(x)$ es n y lo denotamos $gr(P_n(x))=n$

- $P_n(x)$ es mónico si $a_0 = 1$
- Si n=0, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{0} a_k x^{n-k} = a_0$, decimos que el polinomio $P_0(x)$ es de grado cero

En particular consideraremos los polinomios de $\mathbb{C}[x]$, esto es:

- $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$, por lo tanto P es una función definida sobre el cuerpo de los números complejos, con valores en $\mathbb{C}$ y cuyo valor para cada $x \in \mathbb{C}$ es el número complejo $P_n(x)$, donde ahora los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ son números complejos fijos (eventualmente reales) siendo $a_0 \neq 0$, con n entero no negativo

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow P_n(x) \overset{def}{=} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \text{ ; } P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$$

Por ejemplo sean las funciones

a) $P_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$x \mapsto P_1(x) = a_0 x + a$, es decir que $P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} a_k x^{1-k}$

- $n = 1 \in Z$ no negativos $(\mathbb{N} \cup \{0\})$
- $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ {eventualmente a los reales} $a_0 \neq 0$

  $gr(P_1(x)) = 1$ $a_0 \neq 0$

b) $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$x \mapsto Q_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, es decir que $Q_2(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^{2-k}$

- $n = 2 \in \mathbb{Z}$ no negativos
- $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ {eventualmente a los reales} $a_0 \neq 0$

  $gr(Q_2(x)) = 2$ $a_0 \neq 0$

Igualdad de Polinomios

Dos polinomios se definen iguales si tienen el mismo grado y todos los coeficientes correspondientes son iguales entre si, es decir:

Si $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ y $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}$ diremos que

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_k = b_k \quad \forall k = 0,1,\ldots,n$$

Decimos que son idénticos $P(x) \equiv Q(x)$

<u>Nota</u>: si $P(x) \equiv Q(x) \Rightarrow \underbrace{P(x) - Q(x)}_{es\ identicamente\ nulo} = \sum_{k-0}^{n} (a_k - b_k) x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 0 x^{n-k}$

Recordamos que en $K[x]$ se pueden sumar, restar y multiplicar polinomios. Además podemos dividir en $K[x]$ un polinomio por otro de la forma $x - a$ con a$\in K$, esto es obtener el polinomio cociente y el polinomio resto, ambos en $K[x]$.

TEOREMA

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de $K[x]$ y $Q(x)$ es mónico, entonces existen <u>únicos</u> polinomios $C(x)$ y $R(x)$ en $K(x)$ tales que:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x) \quad \text{Con}$$

$$R(x) = 0 \qquad \text{ó} \qquad gr(Rx) < gr(Qx)$$

A $C(x)$ se lo llama polinomio cociente y a $R(x)$ polinomio resto.

<u>Comentario</u>

Sean $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $Q_m(x) = \sum_{h=0}^{m} b_k x^{m-h}$

donde $a_0 \neq 0$, $gr\, P_n(x) = n$, $gr\, Q_m(x) = n$ y $b_0 = 1$

$Q(x)$ es mónico

- Si $n < m$, $C(x) = 0$ y $R(x) = P(x)$
- Si $n \geq m$ $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$

<u>Ecuación Algebraica</u>

Ecuación algebraica de grado n es la expresión, $P_n(x) = 0$ o sea

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

O $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0$ o bien $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k = 0$

Verdaderamente, como en toda ecuación, nos hacemos la pregunta ¿Cuál es el conjunto solución $S = \{\alpha \in C / P_n(\alpha) = 0\}$?

- S se llama ***conjunto solución*** de $P_n(x) = 0$
- Los elementos se S reciben el nombre de ***raíces*** de la ecuación $P_n(x) = 0$ o ***ceros*** del polinomio $P_n(x)$

Ceros de un polinomio

Sea $P_n(x) \in K[x]$ diremos que

$\alpha \in K$ es ***raíz*** de la ecuación $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow P_n(\alpha) = 0$

Observamos que:

Si $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \in K[x] \Rightarrow P_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^{n-k} \in K$

Los siguientes son criterios que permiten determinar si un elemento α de K es raíz de un polinomio $P_n(x) \in K[x]$

Proposición

$\alpha \in K$ es raíz de $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)/P_n(x)$

$[(x-\alpha)$ divide a $P_n(x)$ en $K[x]]$ si y solo si el resto es 0

Demostración:

Sabemos que existen $C(x), R(x) \in K[x]$ tales que $P(x) = (x-\alpha).C(x) + R(x)$

$R(x) = 0$ ó $gr(Rx) < gr(Qx)$ $R(x) = r \in K$;

α es raiz de $P_n(x)$

$$\Leftrightarrow 0 = P_n(\alpha) = \overbrace{\overbrace{(\alpha-\alpha)}^{=0} C(\alpha)}^{=0} + R(\alpha) = R(\alpha) = R \Leftrightarrow (x-\alpha)/P_n(x)$$

Aplicación de la Regla de Ruffini

α es raíz de $P_n(x) \Leftrightarrow (x-\alpha)/P_n(x)$ es decir que $P_n(x)$ es divisible por $(x-\alpha)$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\
 & & c_0\alpha & c_1\alpha & \dots & c_{n-2}\alpha & c_{n-1}\alpha \\
\alpha & & & & & & \\
\hline
 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n
\end{array}$$

Donde

$c_0 = a_0$

$c_1 = a_1 + c_0\alpha$

$\vdots$

$c_k = a_k + c_{k-1}\alpha$

$\vdots$

$c_n = a_n + c_{n-1}\alpha$

Puede comprobarse que

$Q(x) = x - \alpha$

$C(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$ Es el polinomio Cociente

$R(x) = c_n$ Es el polinomio Resto

La división es exacta, luego $c_n = 0$

Debido a la imposibilidad de usar esta regla para todos los elementos de K, ella será útil sólo cuando, por algún otro criterio, podamos asegurar que las posibles raíces de $P_n(x)$ en K están en un determinado conjunto de K, que tenga pocos elementos.

Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)

Sea $P_n(x) \in K[x]$, $gr(P_n) \geq 1$, ¿ $\exists \alpha \in K$ tal que $P_n(\alpha) = 0$? (*)

- Si tomamos $K = \mathbb{Z}$ y $P_1(x) = 2x - 1$

Observamos que $P_1(\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}$

Si $\alpha \leq 0$, $P_1(\alpha) \leq -1$

Si $\alpha \geq 1$, $P_1(\alpha) \geq 1$

- Si $K = \mathbb{R}$ y $P_2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad P_2(\alpha) \geq 1$

Debido a que la respuesta a (*) es negativa, surge la siguiente pregunta:

Sea $P_n(x) \in K[x]$, $gr(P_n) \geq 1$

¿Existe un cuerpo K' tal que $K' \subseteq K$ y $P_n(\alpha) = 0$ para algún $\alpha \in K'$?

(Notemos que $K \subseteq K' \Rightarrow P_n(x) \in K'[x]$). La respuesta está dada por el T.F.A.

<u>Teorema Fundamental del Algebra</u>

Todo polinomio de coeficientes complejos de grado no nulo admite al menos una raíz.

"Si $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $gr(P_n) \geq 1$ entonces $P_n(x) = 0$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$" (es decir el conjunto de raíces del polinomio S es distinto de vacío, $S \neq \emptyset$)

Aceptado el T. F. A se puede probar el siguiente corolario

<u>Corolario del T. F. A</u>.: Teorema de Descomposición Factorial

Toda ecuación algebraica $P_n(x) = 0$ de grado $n \geq 1$ de coeficientes complejos admite exactamente n raíces (no necesariamente todas distintas) y una única descomposición factorial.

Demostración

Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ por el T. F. A , $\exists \alpha_1 \in \mathbb{C} / P_n(\alpha_1) = 0$ y por el teorema del resto

$P_n(x) = (x - \alpha_1)\overline{P}_{n-1}(x)$

Siendo $\overline{P}_{n-1}(x)$ el cociente exacto de dividir $P_n(x)$ por $(x - \alpha_1)$ $(x - \alpha_1) / P_n(x)$, además $\overline{P}_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ resultando, nuevamente a_0 el coeficiente director de $\overline{P}_{n-1}(x)$ como puede fácilmente comprobarse

a) Si $n - 1 = 0$, el corolario del T. F. A esta probado pues tenemos 1 raíz (una) α_1 para $n = 1$, siendo $\overline{P}_0(x) = a_0$, y se tiene $P_1(x) = (x - \alpha_1)a_0$ (para $n = 1$)

b) Si $n - 1 \geq 1$, entonces $\overline{P}_{n-1}(x)$ por tener grado positivo tiene una raíz α_2 y se tiene $\overline{P}_{n-1}(x) = (x - \alpha)\overline{\overline{P}}_{n-2}$

Donde $\overline{\overline{P}}_{n-2}(x)$ es un polinomio de grado $n-2$ que puede, fácilmente verificarse que a_0 es su coeficiente director.

Luego

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)\overline{P}_{n-1}(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\overline{\overline{P}}_{n-2}(x)$$

a´) Si $n - 2 = 0$, el corolario del T. F. A, esta probado para $n - 2$ y se tiene 2 raíces: α_1 y α_2 . Y como $\overline{\overline{P}}_0(x) = a_0$, nos queda $P_2(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)a_0$

b´) $n-2\geq 1$, $\overline{\overline{\overline{P}}}_{n-2}(x)$ tendrá una raíz α_3 y se tendría $\overline{\overline{P}}_{n-2}(x)=(x-\alpha_3)\overline{\overline{\overline{P}}}_{n-3}(x)$

Siendo a_0 nuevamente el coeficiente director de $\overline{\overline{\overline{P}}}_{n-3}(x)$

Continuando con este razonamiento llegamos finalmente a un polinomio de primer grado $P_{n-1}(x)$ que tiene coeficiente director a_0 y una raíz α_n: $P_{n-1}(x)=(x-\alpha_n)a_0$

Llegamos así a: $P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)a_0$

El segundo miembro es la descomposición factorial de $P_n(x)$

Tenemos pues estos resultados:

1. Todo polinomio de grado $n\geq 1$ puede descomponerse en un producto de $n+1$ factores, uno de los cuales es el coeficiente director a_0 y los otros n son binomios de primer grado.
2. todos los polinomios de grado n tienen n raíces.

- En la descomposición realizada no se excluye la posibilidad que haya binomios de primer grado que coincidan.

En la descomposición factorial $P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)a_0$, no está excluida la posibilidad que dos o más de las raíces $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sean iguales, por ejemplo: del hecho que al dividir $P_n(x)$ por $(x-\alpha_1)$, el polinomio cociente $\overline{P}_{n-1}(x)$ sea también divisible por $(x-\alpha_1)$

Esta situación nos lleva a decir que:

Si entre las n raíces $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ hay k de ellas pero no más de k que son iguales a un cierto numero δ, de acuerdo con la descomposición factorial el polinomio $P_n(x)$ será divisible por $(x-\delta)^k$ y en cambio no lo será por ninguna potencia de $(x-\delta)$ mayor que k.

De aquí surge que δ es una raíz múltiple de orden k de multiplicidad de la ecuación $P_n(x)=0$

En particular, si $k=1$ la raíz se dice **simple**, si $k=2$, **doble**, si $k=3$, **triple**, etc.

→ Por consiguiente, si las raíces <u>distintas</u> de la ecuación $P_n(x) = 0$ son $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_h$ y sus respectivos ordenes de multiplicidad $k_1, k_2, ..., k_h$, la descomposición factorial de $P_n(x)$ toma la forma que sigue:

$P_n(x) = a_0(x - \delta_1)^{k_1}(x - \delta_2)^{k_2} ...(x - \delta_h)^{k_h}$ con $k_1 + k_2 + ... + k_h = n$

Por lo tanto, al decir que un polinomio de grado n tiene n raíces, no decimos que sean todas distintas, sino que cada una se cuenta tantas veces como sea su orden de multiplicidad

Ejemplo:

$$P(x) = 2(x-2)(x-2)(x-2)(x-3) = 2(x-2)^3(x-3)$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ $\quad 2 = \delta$ $\quad k = 3$

Puede probarse que:

1. "La descomposición factorial es única" (salvo el orden de los factores)
2. "La ecuación $P_n(x) = 0$ no admite ninguna otra raíz fuera de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$
3. "Si un polinomio de grado $m \leq n$ se anula para más de n valores distintos de la variable x, $P_n(x)$ es forzosamente el polinomio nulo. De este resultado sigue que:

Si dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grado $m_1 \leq n$ y $m_2 \leq n$ respectivamente son iguales para mas de n valores distintos de la variable x, los polinomios son idénticos (Principio de Identidad de Polinomios)

RELACIONES ENTRE COEFICIENTES Y RAÍCES DE UN POLINOMIO

Si con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ designamos las n raíces de $P_n(x) = 0$

Pongamos

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \\
\gamma_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\
\gamma_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n \\
&\vdots \\
\gamma_n &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que:

$$\gamma_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\gamma_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\vdots \qquad (1)$$

$$\gamma_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Llamadas relaciones entre raíces y coeficientes de un polinomio.

Siendo $\forall x \in \mathbb{C}$ (por la factorización)

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

O equivalentemente (como $a_0 \neq 0$)

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + ... + \frac{a_n}{a_0} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

Y por definición dados en (1) resulta:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = x^n - \gamma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \gamma_n$$

Igualdad que habrá de probarse, la haré por P. I. C (principio de inducción completa).

$n = 1$ resulta

$$x - \alpha_1 = x - \gamma_1 x^0$$
$$x - \alpha_1 = x - \gamma_1$$

γ_1 aquí igual a α_1 y no hay otro γ

Suponemos verdadero para $n = p$

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_p) = x^p - \gamma_1 x^{p-1} + \ldots + (-1)^p \gamma_p$$

Donde

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$$
$$\gamma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_p + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{p-1}\alpha_p$$
$$\vdots$$
$$\gamma_p = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}\alpha_p$$

Ahora debo probar que es verdadero para $n = p + 1$

Multiplicando ambos miembros por $x - \alpha_{p+1}$

$$\left[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p)\right](x-\alpha_{p+1})=$$
$$=\left[x^p-\gamma_1 x^{p-1}+\ldots+(-1)^p\gamma_p\right](x-\alpha_{p+1})=$$
$$=x^{p+1}-\gamma'_1 x^p+\ldots+(-1)^{p+1}\gamma'_{p+1}$$

Siendo

$$\gamma'_1=\gamma_1+\alpha_{p+1}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p+1}$$
$$\gamma'_2=\gamma_2+\gamma_1\alpha_{p+1}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{p-1}\alpha_p+\alpha_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$\gamma'_{p+1}=\gamma_p\alpha_{p+1}=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_p\alpha_{p+1}$$

Hemos probado para $n=1$ y aceptado para $n=p$, hemos probado que la relación se cumple para $n=p+1$ entonces se cumple $\forall n\in\mathbb{N}$.

→Ejemplo:

Siendo $\alpha_1=\alpha_2=1 \quad y \quad \alpha_3=2$ construimos una ecuación cuyas raíces sean estas.

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4$

$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=5$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=2$

$x^3-4x^2+5x+2=0$

I-2: Ecuación Polinómica de grado n

La Ecuación de Tercer Grado

Sea $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \qquad a_0\neq 0$, podemos normalizar

$$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=0$$

Llamemos $\dfrac{a_1}{a_0}=a$, $\dfrac{a_2}{a_0}=b$, $\dfrac{a_3}{a_0}=c$

Luego tenemos:

$x^3+a\ x^2+bx+c=0$ Nos preguntamos por el conjunto S.

Analicemos casos particulares

I] Ecuación incompleta sin termino independiente

$c = 0 \qquad x^3 + a\ x^2 + bx = 0$

Factoreando → $x\left(x^2 + ax + b\right) = 0$

$$S = \left\{\alpha_1 = 0\,,\, \alpha_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,,\, \alpha_3 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right\}$$

II] Si $c = 0$ y $b = 0$ Resulta la ecuación binómica:

$x^3 + ax^2 = 0$

$x^2(x + a) = 0$

$$S = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -a\}$$

III] Si $a = 0$ y $b = 0$, Tenemos la ecuación binómica:

$x^3 + c = 0$

$$S = \left\{x / x = \sqrt[3]{-c}\right\}$$

IV] Si $a = 0$, $c = 0$

$x^3 + bx^2 = 0$

$x\left(x^2 + b\right) = 0$

$$S = \left\{\alpha_1 = 0\,,\, \alpha_2 = \alpha_3 = \sqrt{-b}\right\}$$

Ya definimos que "cero de $P(x)$ o raíz de $P(x)$ es un numero $\alpha \in \mathbb{C}$ (eventualmente $\alpha \in C\mathbb{R}$) tal que $P(\alpha) = 0$ "

Sabemos que si:

(1) $n = 1 \quad : \quad P(x) = a_0 x + a_1 \qquad \alpha = -\dfrac{a_1}{a_0}$

(2) $n = 2 \quad : \quad P(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$

En (1) si a_0 y a_1 son reales, la raíz de la ecuación es también real.

Esta observación no vale en general para las ecuaciones de 2º grado pues sabemos que existen ecuaciones de 2º grado con coeficientes reales que carecen de solución en el conjunto de los números reales

Pero sin embargo poseen siempre solución en $\mathbb{C}$ y precisamente dos.

Como sabemos $\alpha_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$

De manera que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\alpha_1 . \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

→ A las ecuaciones de 2º grado siguen en orden de complejidad las ecuaciones de grado 3 y 4 cuyas formas mas generales son

$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ Y $a_0x^4 + a_1x^3 + \ldots + a_4 = 0$

Donde se supone siempre $a_0 \neq 0$

Respecto de estas ecuaciones, existen desarrollos complicados para hallar las raíces de las mismas.

El éxito obtenido en el siglo XVI con las ecuaciones de 3º y 4º grado, impulsó a los matemáticos de los siglos XVII y XVIII a buscar solución por medio de radicales de la ecuación general de 5º grado y de las ecuaciones de grado superior al quinto.

Pero luego de diversos intentos frustrados, los matemáticos Ruffini y Abel probaron la imposibilidad de resolver por medio de radicales la ecuación general de 5º grado, y con mayor razón, las ecuaciones de grado superior al 5º.

ECUACIÓN RECIPROCA DE SEGUNDA ESPECIE

Para la ecuación de tercer grado $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ admite como raíz a $\alpha_1 = 1$ esto es:

	a	*b*	*-b*	*-a*
1		*a*	*b+a*	*a*
	a	*b+a*	*a*	*0*

Luego $ax^2 + (b + a)x + a = 0$ es una ecuación de segundo grado de la cual obtenemos dos raíces que serán precisamente las dos raíces restantes de la ecuación dada.

> Observación
>
> • Si la suma de los coeficientes de la ecuación de tercer grado es igual a 0, la ecuación admite la solución $\alpha_1 = 1$, dividiendo el polinomio por $x - 1$, se obtiene una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son las restantes raíces de la ecuación dada.

En general si se reconoce una solución α de la ecuación de tercer grado se reduce a una ecuación de segundo grado dividiendo por $x - \alpha$ en particular conviene ensayar las posibles raíces ±1

Ejemplo $2x^3 - 5x + 3 = 0$

Admite $\alpha_1 = 1$ pues la suma de los coeficientes $2 + (-5) + 3 = 0$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 0 & -5 & 3 \\
 & & 2 & 2 & -3 \\
1 & & & & \\
\hline
 & 2 & 2 & -3 & 0
\end{array}
$$

$2x^2 + 2x - 3 = 0$ cuyas raíces son las restantes de la dada.

→ Sin embargo sabemos "resolver" polinomios particulares de grado superior al segundo.

Por ejemplo:

i)

$$a_0 x^4 + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

$$a_0 , a_n \in \mathbb{C} \quad tal\ que$$

$$x_k = \sqrt[n]{\frac{-a_n}{a_0}} \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

El difícil problema de determinar cuáles ecuaciones de 5º grado (o más generalmente de grado superior al 5º son resolubles por radicales y cuales no, fue resuelto por el matemático francés Galois, con esto dio la base de una importante teoría conocida como la Teoría de Galois.

ii) Ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^{n} + c = 0 \quad a \neq 0$, de grado 2n

Las resolvemos de esta manera:

Poniendo $x^n = u$

Se sigue: $au^2 + bu + c = 0$

Obteniéndose los números u_1 y u_2, raíces de la ecuación de segundo grado en la variable u.

Para u_1 y u_2 fijos se sigue en x=$\sqrt[n]{u_1}$ y x=$\sqrt[n]{u_2}$ de la que resultan así las 2n raíces de la ecuación bicuadrada dada.

ECUACIONES RECIPROCAS

Hacemos una presentación particular de ecuaciones reciprocas. Por ejemplo cuando se hace referencia a ecuaciones reciprocas de grado par, desarrollaremos el caso de 4º grado y para las de grado impar el caso de las ecuaciones de 5º grado.

Otra aclaración que voy a hacer es que la definición misma de ecuación reciproca que adoptare difiere de la habitual, es decir, de la que se presenta en los libros clásicos de algebra, pero resultan ser equivalentes.

1. Ecuación Reciproca de Grado Par

Consideraremos el caso de la ecuación de 4º grado.

Una ecuación de 4º grado, cuyos términos equidistantes de los extremos tienen coeficientes iguales a saber: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ siendo $a \neq 0$, es por definición (para nosotros) una ecuación reciproca de 4º grado. La generalización para grados 6º, 8º,…, 2m es obvia.

Observamos que la ecuación dada no puede tener una raíz $\alpha = 0$

→ Utilizando nuestra definición puede probarse que si α es raíz también los es $\dfrac{1}{\alpha}$:

$$a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + b\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a =$$

$$\frac{\overbrace{a + b\alpha + c\alpha^2 + b\alpha^3 + a\alpha^4}^{=0}}{\alpha^4} =$$

$$\frac{a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + b\alpha + a}{\alpha^4} = \frac{0}{\alpha^4}$$

Por la hipótesis de que α es raíz de (1) $\Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}$ es también raíz de (1)

¿Cómo resolvemos (1)?

Siendo $x \neq 0$, dividimos por x^2 y agrupamos

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

De manera que $a\left(t^2 - 2\right) + bt + c = 0$

Sustituyendo los números fijos t_1 y t_2 en $t = x + \dfrac{1}{x}$ se llega a la ecuación x^2-t x+1=0, de la cual se obtienen las raíces α_1; $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1}$; α_3; $\alpha_4 = \dfrac{1}{\alpha_3}$.

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = x + \dfrac{1}{x} \\ t_2 = x + \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - t_1 x + 1 = 0 & \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1} \end{cases} \\ x^2 - t_2 x + 1 = 0 & \begin{cases} \alpha_3 \\ \alpha_4 = \dfrac{1}{\alpha_3} \end{cases} \end{cases}$$

<u>Nota:</u> siempre podemos suponer que a > 0, cosa que hacemos a partir de ahora.

Por ejemplo si se desea calcular las raíces de la ecuación $6x^4+9x^3+15x^2+9x+6=0$

Siendo $x \neq 0$, dividimos por x^2 y agrupamos

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 15 = 0 \qquad (1)$$

$$\text{Como } t=\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow tx = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - tx + 1 = 0 \qquad (2)$$

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$6(t^2-2)+9t+15=0$

$6t^2-12+9t+15=0$

$6t^2+9t+3=0$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81-(4.3.6)}}{2.6} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{12} = \frac{-9 \pm 3}{12},\ t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = -1$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2):

Para t_1= $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0;\quad 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i$

Para t_2= $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Ecuación Reciproca de Grado Impar

2a) $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

2b) $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$

Entenderemos que a > 0, pero b y c pueden no serlo.

Afirmamos que las ecuaciones 2a) y 2b) admiten raíces -1 y +1 respectivamente, es decir, de signo contrario al signo del término independiente.

Por ejemplo sea la ecuación:

$x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ admite una raíz α_1= -1

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$C(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ =0, esta ecuación es una recíproca de grado par, en particular de 4º grado, resolviendo esta ecuación se obtienen las cuatro raíces restantes α_2, α_3, α_4 y α_5.

EVALUACIÓN DE RAÍCES REALES

a) Acotación de las raíces reales de un $P_n(x) \in \mathbb{R}$ [x]

b) Evaluación de raíces racionales $P_n(x) \in Q[x]$

c) Aproximación de raíces irracionales

Evaluación de Raíces Reales

En general, la evaluación de raíces reales de un polinomio es una tarea numéricamente engorrosa. Es importante conocer algoritmos para hacerlo aún cuando sólo se obtengan aproximaciones de las raíces. El conocimiento de los mismos permitirá realizar programas que serán procesados por una computadora.

La investigación de las raíces reales de una ecuación algebraica de coeficientes reales se resuelve mediante un conjunto de procedimientos que conviene realizar en orden; estas etapas son las siguientes:

I. Limitación de las Raíces

La primera tarea consiste en hallar un intervalo (l, L) que contenga todas las raíces reales.

II. Determinación de las Raíces Enteras y Racionales

Si es posible determinar las raíces racionales que eventualmente el polinomio tuviera.

III. Determinación de Raíces Irracionales

La determinación de las raíces irracionales se lleva a cabo mediante dos operaciones.

IIIa. Separación de las raíces reales

Consiste en descomponer el intervalo dentro del cual se encuentran las raíces del polinomio (l, L), de modo que cada intervalo contenga una sola raíz.

IIIb. Aproximación de las raíces reales

A través del Teorema de Bolzano podemos detectar para cada subintervalo la existencia o no de raíces irracionales.

I. Limitación de las Raíces

Definiciones:

La limitación de las raíces de un polinomio es un procedimiento (ó algoritmo) que permite determinar dos números reales entre los cuales se encuentran todas las raíces reales del polinomio.

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0 \qquad a_k \in \mathbb{Z}$, puede suceder que esta ecuación tenga raíces negativas y positivas, así como puede suceder que admita raíces de un solo signo.

Definición: Acotar superiormente las raíces positivas de $P(x)$ = 0 es hallar un número $L > 0$ tal que toda raíz $\alpha \leq L$

Análogamente acotar inferiormente las raíces negativas de $P(x)$ es hallar un número $L' < 0$ tal que toda raíz $\alpha \geq L'$

Si se consigue un criterio para hallar un $L > 0$ para $P(x)$ este mismo criterio permite hallar $l < 0$ tal que toda raíz real $\alpha \in (l, L)$

En efecto, el número <u>positivo</u> $-l$ (pues $l < 0$) es cota superior de las raices positivas del polinomio $P(-x)$.

<u>Teorema</u>:

Si un polinomio tiene todos sus coeficientes positivos carece de raíces positivas.

<u>Demostración</u>

Sea $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n \quad a_k \geq 0 \quad \forall k = 0, 1, \cdots, n$

Supongamos $\alpha > 0$, entonces $P(\alpha) > 0$ lo cual nos está asegurando que el polinomio no se anula para algún α positivo.

<u>Teorema</u>: (Regla-Criterio de Laguerre)

Si L es un número real positivo tal que en la división de $P(x)$ por el binomio $x - L$, los coeficientes del cociente y el resto son positivos o nulos, L es una cota superior (un límite superior) de la raíces positivas del polinomio $P(x) = 0$

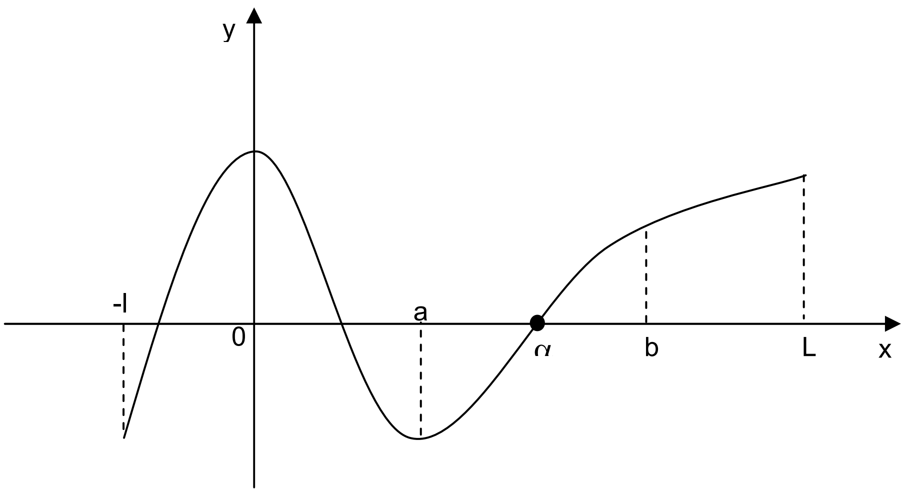
<u>Prueba</u>

$P(x) = Q(x)(x - L) + R$

Por hipótesis los coeficientes de $Q(x)$ son no negativos y además $R > 0$.

Si $\alpha > L$, es imposible que $P(\alpha) = (\alpha - L) Q(\alpha) + R$ se anule, en consecuencia toda raíz $\alpha \leq L$.

→Para acotar inferiormente las raíces negativas de $P(x) = 0$, bastará sustituir en ésta x por $-x$ y en la ecuación transformada hallar una cota superior positiva; ésta cota cambiada de signo es una cota inferior de las raíces negativas de $P(x) = 0$.



Ejemplo: acotar las raíces reales de P(x)= $x^3-6x^2-9x+14$

Por ejemplo, se divide el polinomio entre (x-8)

	1	-6	-9	14
8		8	16	56
	1	2	7	$\boxed{70}$

Como puede observarse, los coeficientes del cociente y el resto son positivos por ello puede decirse que $L = 8$ es una cota superior (un límite superior) de la raíces positivas del polinomio $P(x)$.

Para encontrar la cota inferior de P(x) hacemos – P(-x)

-P(-x)= -($-x^3-6x^2+9x+14$)

P(-x)= $x^3+6x^2-9x-14$

Hallamos L' > 0 una cota superior de P(-x) siguiendo el mismo procedimiento.

	1	6	-9	-14
2		2	16	14
	1	8	7	$\boxed{0}$

Se observa que L' =2 entonces l como cota inferior de P(x) es -2.

El intervalo de acotación de las raíces racionales de P(x) dado es: (-2, 8).

II. <u>Determinación de las Raíces Enteras y Racionales</u>

De ahora en adelante trabajaremos con polinomios en $\mathbb{Z}[x]$ y presentaremos condiciones necesarias que verifican sus raíces racionales o enteras.

→ Sea $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\quad P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0 \qquad a_0 \neq 0$, n≥1

Podemos enunciar el siguiente criterio:

Si $r = \frac{p}{q}$ es una <u>raíz racional</u> de $P(x)$ y además $\frac{p}{q}$ es la forma <u>irreducible</u> de r

$$\left.\begin{array}{l}(p\,,\,q)=1\\ p\ \ y\ \ q\ \ coprimos\end{array}\right] \Rightarrow\ p \diagup a_n \ \ y \ \ q \diagup a_0\,, \qquad a_n\ y\ a_0 \in \mathbb{Z}$$

En particular, si r es una raíz entera entonces r es divisor de $a_n \in Z$ $\left(r/a_n \right)$

Evaluación de Raíces Racionales

→Sea $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ a_k $a_0 , a_1 , \ldots , a_n \in Q$ $a_0 \neq 0$ si los coeficientes son racionales puedo suponer que son enteros puesto que dada una ecuación algebraica con coeficientes racionales siempre podemos obtener una ecuación equivalente (es decir que tiene las mismas raíces) cuyos coeficientes son enteros.

Podemos probar el criterio enunciado en la página anterior.

PRUEBA

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

$r = \dfrac{p}{q}$ es una raíz por hipótesis

$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0$ o sea

$$a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0$$

(Sacamos común denominador q^n)

$$\frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + ... + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n}{q^n} = 0$$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + ... + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0$$

$$a_0 p^n = -q\left(a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^{n-1}\right)$$

$$a_n q^n = -p\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \ldots + a_{n-1} q^{n-1}\right)$$

Las cantidades entre paréntesis son números enteros $E_1 \ y \ E_2$

$$\begin{cases} a_0 p^n = -q E_1 \\ -p E_2 = a_n q^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_0}{q} p^n = -E_1 \\ -E_2 = \dfrac{a_n}{p} q^n \end{cases}$$

Como $E_1 \ y \ E_2 \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \dfrac{p}{q}$ es una fracción irreducible, es decir

$$(p,q)=1 \Rightarrow \frac{a_0}{q} \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \frac{a_n}{p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{q}{a_0} \wedge \frac{p}{a_n}$$

Este criterio da una condición <u>suficiente</u> pero no <u>necesaria</u> para que $\dfrac{p}{q}$ sea una raíz racional o sea que los "candidatos" a numeradores son los divisores del término independiente y los "candidatos" a denominadores son los divisores del coeficiente director a_0 .

Ejemplo:

Hallar las raíces racionales de P(x)= $2x^4$-$3x^3$+2 x^2-6x-4

Si $\frac{p}{q}$ es solución racional, entonces p es factor de -4 y q es factor de 2.

Posibles p: 1, -1, 2, -2, 4, -4

Posibles q: 1, -1, 2, -2

$\frac{p}{q}$= 1, -1, $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$, 2, -2, 4, -4

Aplicando la regla de Ruffini para algunas de estas posibles soluciones:

	2	-3	2	-6	-4
2		4	2	8	4
	2	1	4	2	$\boxed{0}$
-1/2		-1	0	-2	
	2	0	4	$\boxed{0}$	

Por lo tanto la ecuación polinómica puede expresarse como: (x-2)(x+$\frac{1}{2}$)(2x^2+4)=0 y las raíces de 2x^2+4son complejas $\pm\sqrt{2}i$

Supongamos que en el polinomio $P(x)$ obtenemos las raíces racionales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \ \ 0 \le h \le k \le n \qquad p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).C(x)$ donde el grado del polinomio C es $n-1$y sus raíces podrían ser irracionales o complejas.

Esto nos lleva al tema de la Aproximación de las Raíces Irracionales.

III <u>Aproximación de Raíces Irracionales</u>

Supongamos haber llegado, luego de las etapas anteriores, a un polinomio cuyas raíces sean todas irracionales o complejas.

Conviene determinar nuevas cotas $(\bar{l}, \overline{L})$ y subdividir el intervalo $(\bar{l}, \overline{L})$ determinando subintervalos que contendrán <u>una</u> raíz irracional o ninguna (bajo el supuesto adicional que el polinomio que ahora tenemos carece de raíces múltiples)

→ Para resolver este problema son muy útiles las siguientes proposiciones:
Para ello consideramos

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \;; \quad a_k \in \mathbb{R} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Definimos la función polinomial

$$P = \{(x\,,\,y)/\,x \in \mathbb{R}\;,\; y = P(x)\}$$
$$P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Por análisis sabemos:

T.I] La función polinomial $y = P(x)$ es continua y derivable en todo $x_0 \in \mathbb{R}$

Es decir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x} = P'(x_0) \exists\; \forall x_0 \in \mathbb{R}$

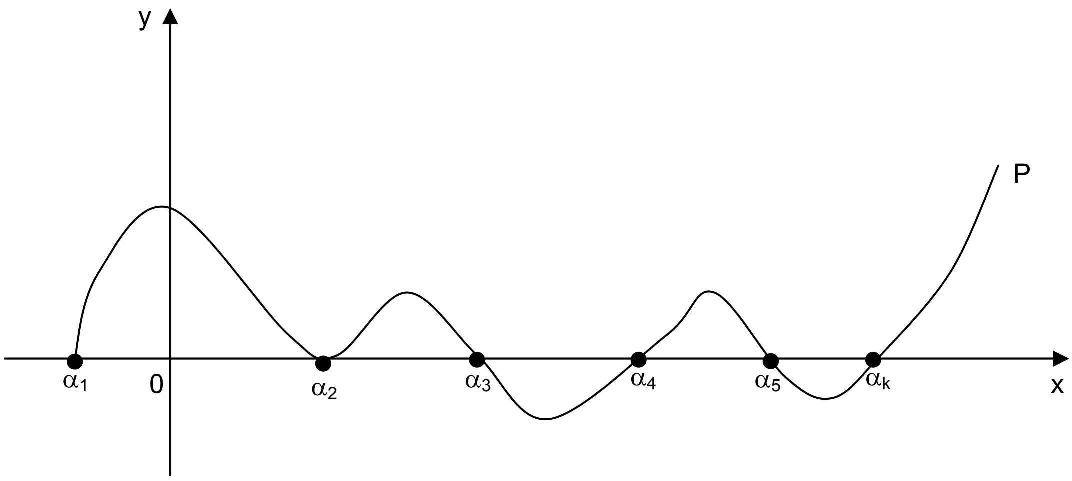
Y además $P'(x) = n\,a_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$

Lo que nos dice que la derivada de un polinomio de grado n es otra función polinomial de grado que puede derivarse nuevamente y obtener $P''(x) = (P'(x))'$

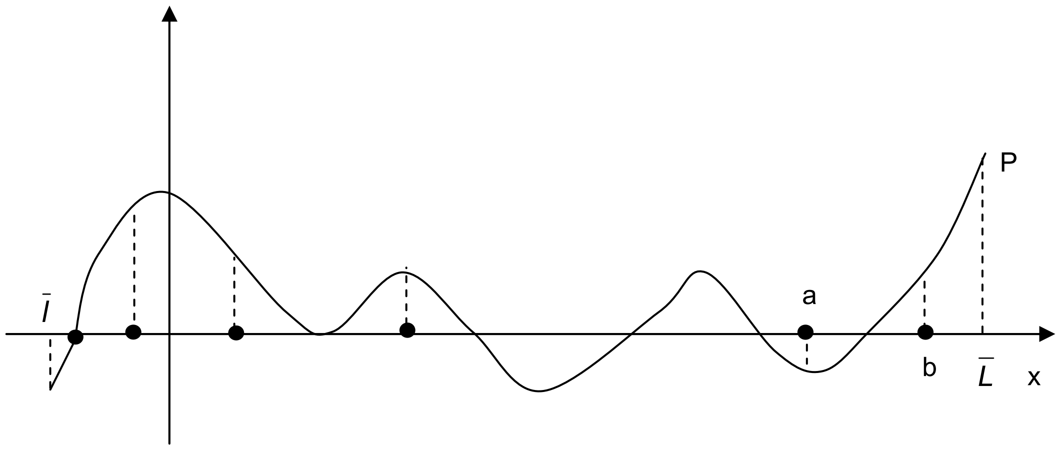
→ Geométricamente nos interesa el significado de la derivada en un punto $(x_0\,,\,P(x_0))$ que es el siguiente:

“ $P'(x)$ representa la pendiente de la <u>recta tangente</u> a la curva definida por P , en un punto de coordenadas $(x_0\,,\,P(x_0))$” :

Si P es una función polinomica dada por $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad a_k \neq 0$ con coeficientes reales su gráfica es la siguiente:



→ Una vez encontradas estas nuevas cota dividimos el intervalo $(\bar{l}, \bar{L})$ en subintervalos de amplitud convenientemente pequeña.



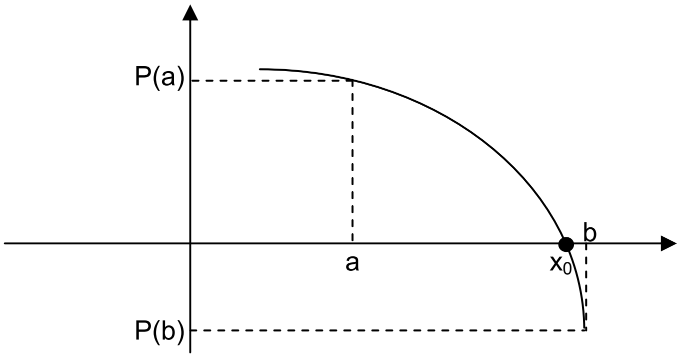
Consideremos una equivalente de estos subintervalos, digamos $[a\ ,\ b]$

→ El Teorema de Bolzano nos ayudara a decidir si en dicho subintervalo hay una raíz.

Teorema de Bolzano

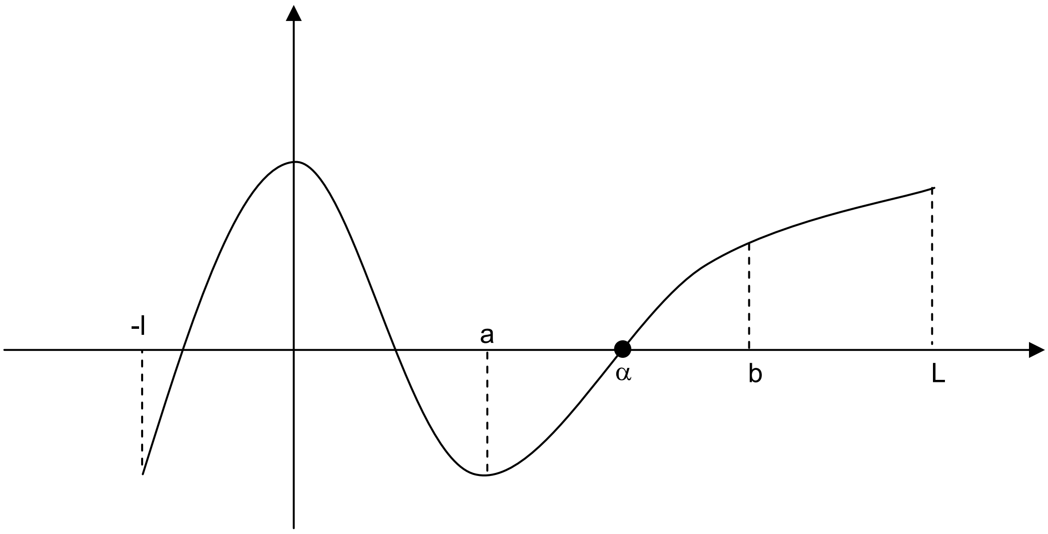
Si P (función polinomial) es continua en todo $x \in [a\ ,\ b]$ y además

$P(a).P(b) < 0$ entonces existe al menos un $x_0 \in (a\ ,\ b)$ tal que $P(x_0) = 0$



P continua en $[a\ ,\ b]$
$P(a) > 0$
$P(b) < 0$
$P(a).P(b) < 0$

→ Luego haciendo uso del Teorema de Bolzano obtenemos subintervalos que contengan una raíz irracional.



a y b son aproximaciones de α por defecto y por exceso.

Hay un procedimiento, que no lo desarrollamos, que permite saber el número exacto de raíces en cada subintervalo.

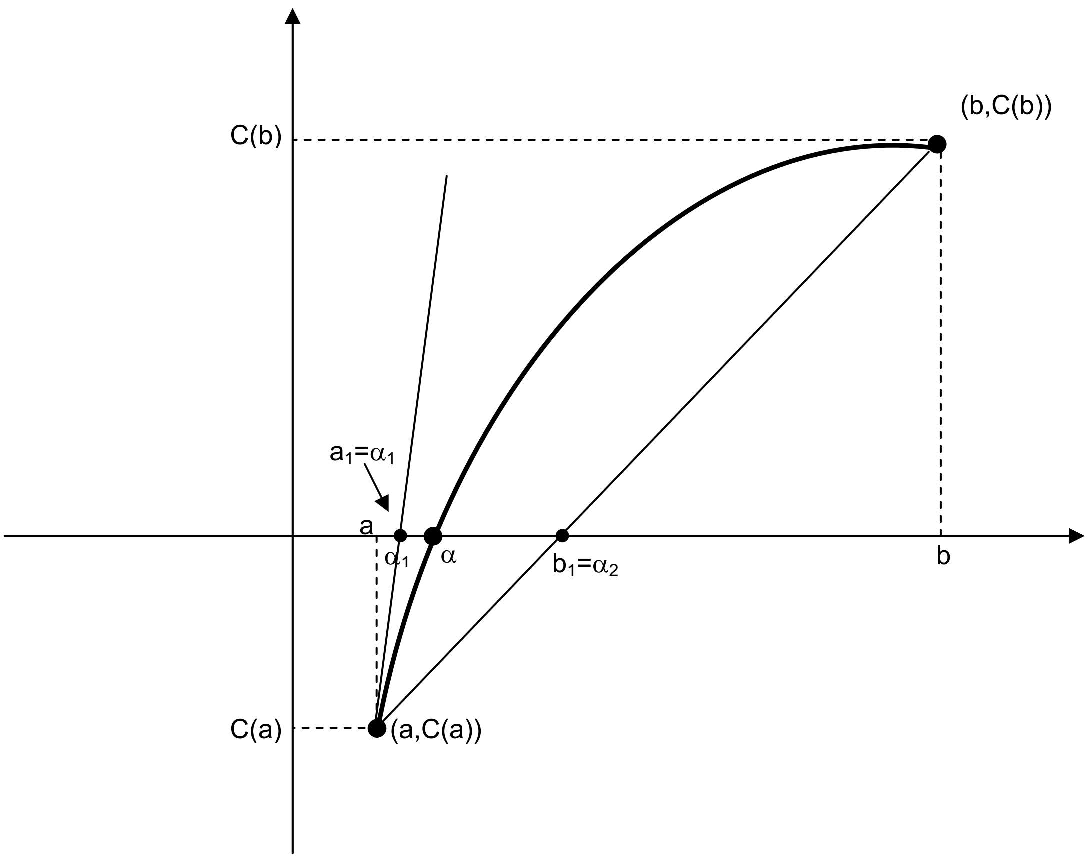
→ Supondremos pues, que en cada subintervalo $(a\,,b)$ haya a lo sumo una raíz irracional y para esto bastara el Teorema de Bolzano.

Método de la Tangente (Newton) Y de las Cuerda (Ruffini)

→ Presentaremos dos métodos basados en consideraciones geométricas para aproximaciones de raíces irracionales.

En caso de que $C(a).C(b)$ sea negativo, determinaremos un intervalo $(a_n\,,b_n) \subset (a\,,b)$ que contiene a la raíz del subintervalo $(a\,,b)$ cuya amplitud $b_n - a_n$ puede hacerse tan pequeña como se quiera.

→ Supongamos que para la función polinómica C tenga un intervalo $(a\,,b) \subset (\bar{l}\,,\overline{L})$ tal que $C(a).C(b) < 0$



Considero la recta tangente trazada por el punto $(a\,,\,C(a))$, y por otro lado la secante que une los puntos $(a\,,\,C(a))$ con $(b\,,\,C(b))$

→ Las mencionadas rectas cortan al eje x en los puntos α_1 y α_2 que son mejores aproximaciones para la raíz α que eran a y b .

→ La recta tangente que pasa por $(a\,,\,C(a))$ tiene pendiente $C'(a)$; luego su ecuación es:

$y - c(a) = C'(a)(x - a)$, puesto que $(\alpha_1\,,\,0) \in$ a dicha recta, tenemos

$$0 - c(a) = C'(a)(\alpha_1 - a)$$

$\alpha_1 = a - \dfrac{C(a)}{C'(a)}$ supuesto que $C'(a) \neq 0$

→ La recta secante que pasa por los puntos $(a\,,\,C(a))$ y $(b\,,\,C(b))$ tiene la ecuación:

$$y - C(b) = \frac{C(b) - C(a)}{b - a}(x - b)$$

Puesto que $(\alpha_2 , 0) \in$ a dicha secante, tenemos $0 - C(b) = \dfrac{C(b) - C(a)}{b - a}(\alpha_2 - b)$,

$$\alpha_2 = b - \frac{C(b)}{\left[\dfrac{C(b) - C(a)}{b - a}\right]}$$

→ Llamando ahora $a_1 = \alpha_1$ y $b_1 = \alpha_2$ obtenemos un intervalo que contiene a la raíz y que cumple con esta condición, $(a_1 , b_1) \subset (a , b)$.

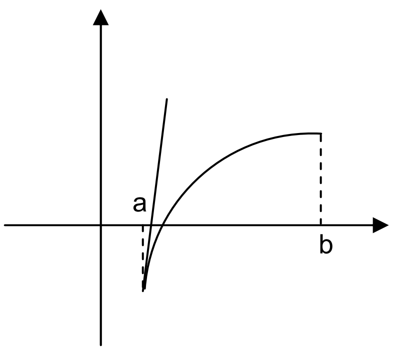
→ Reiterando este procedimiento de trazar tangentes y cuerdas, podemos encontrar un intervalo (a_n , b_n) que contiene a la raíz de amplitud menor que el precedente y así $(a_n , b_n) \in (a_{n-1} , b_{n-1}) \subset \ldots \subset (a , b)$

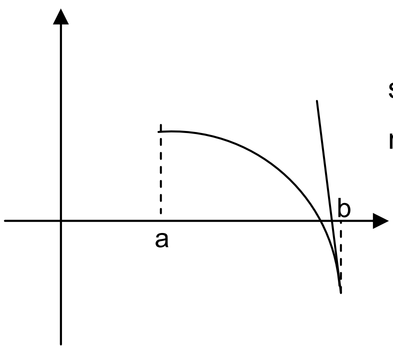
<u>Observaciones</u>

Mientras que para la secante usamos los dos extremos del intervalo (a , b), para la tangente elegimos uno, ¿cómo hacemos esta elección?

Para esto hacemos las siguientes observaciones:

▲ Si las curvas dirigen su concavidad hacia abajo. Luego tienen derivadas <u>segundas negativas</u>.

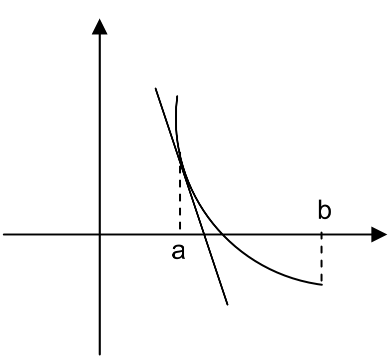


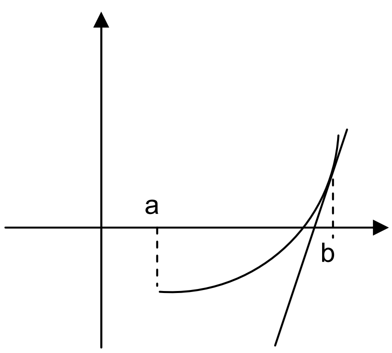


$P''(x) < 0$ Y la recta tangente se traza por el punto de ordenada negativa

▲ Si las curvas dirigen su concavidad hacia arriba, tienen derivadas <u>segundas positivas</u>.

$P''(x) > 0$ Y la recta tg que se traza pasa por el punto de ordenadas positivas.





→ Como conclusión

Conviene trazar la tg en el extremo en el que $C''(x)$ tiene el mismo signo que el valor de la función (esto es $C(a)$ o $C(b)$)

Polinomios con Coeficientes Reales

Muchos problemas prácticos conducen a polinomios cuyos coeficientes son números reales fijos.

Sin embargo, a pesar que un cierto $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, bien puede tener raíces complejas no-reales.

- Por ejemplo

$x^2 + 1 = 0$

Teorema:

Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n con todos sus coeficientes reales que admite una raíz compleja no-real (ρ / φ), entonces admite otra raíz compleja no-real que es la conjugada $(\rho /- \varphi) = (\rho / 2\pi - \varphi)$.

Demostración:

Sea $P_n(x) = \sum_{h=0}^{n} a_h x^{n-h} \quad a_k \in \mathbb{R} \quad k = 0, 1, \dots, n$

$\rho\, e^{i\varphi}$ Raíz compleja de $P_n(x) = 0$,

Entonces

$$P_n\left[\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^{n-k}\left[\cos(n-k)\varphi + i\ sen\,(n-k)\varphi\right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k\, \rho^{n-k} \cos(n-k)\varphi + i \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^{n-k} sen\,(n-k)\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \rho^{n-k} \cos(n-k)\varphi = 0 \\ J = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^{n-k} sen\,(n-k)\varphi = 0 \end{cases}$$

$$P_n\left[\rho\, e^{i\varphi}\right] = R + i\,J = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 0 \\ J = 0 \end{cases}$$

Si formamos $P_n\left[\rho\, e^{-i\varphi}\right]$, resulta:

$$P_n\left[\left(\rho\, e^{-i\varphi}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\rho\, e^{-i\varphi}\right)^{n-k} =$$

$$=\sum_{k=0}^{n} a_k\,\rho^{n-k}\left[\cos(n-k)\varphi - i\ sen\,(n-k)\varphi\right]== R - i\,J$$

Puesto que

$$\begin{cases} R=0 \\ J=0 \end{cases} \Rightarrow P_n\left[\rho\, e^{-i\varphi}\right]=0 \Leftrightarrow \rho\, e^{-i\varphi} = \rho\left[\cos(-\varphi)+ isen\,(-\varphi)\right]=$$

$$=\rho\left(\cos\varphi - isen\,\varphi\right) es\ \ raiz\ \ de\ \ P_n(x)=0$$

→ <u>Observación</u>

Si quitamos la hipótesis de que $P_n(x)$ tiene coeficientes reales el Teorema No es verdadero, pues por ejemplo $x^2+i=0$ admite raíces complejas que no son conjugadas

$$\alpha_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \alpha_2=+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ Si se admite que la particular raíz compleja pudiera ser real, Teorema también falla, pues $\left.\begin{array}{l}\alpha_1=a+i\,0\\ \alpha_2=a-i\,0\end{array}\right\}$ impone que el polinomio $P_n(x)$ debe tener una <u>raíz doble</u> por cada raíz real, esto también es falso.

→ <u>Corolario</u>:

Si $P_n(x)$ es un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ con todos sus coeficientes reales y admite una <u>raíz compleja</u> no real $\rho\, e^{i\varphi}$, entonces $P_n(x)$ es divisible por $x^2-2\rho\, x\cos\varphi+\rho^2$.

<u>Demostración</u>:

Como $P_n(x)$ admite la raíz $\rho\, e^{i\varphi}$ sabemos que admite su conjugada $\rho\, e^{-i\varphi}$. Luego $\left(x-\rho\, e^{i\varphi}\right)$ y $\left(x-\rho\, e^{-i\varphi}\right)$, luego es divisible por

$$\left(x-\rho\, e^{i\varphi}\right).\left(x-\rho\, e^{-i\varphi}\right)=$$

$$= x^2 - x\rho\, e^{-i\varphi} - x\,\rho\, e^{i\varphi} + \rho^2\, e^{i\varphi}.e^{-i\varphi} = x^2 - \rho\, x\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)+\rho^2$$

→ <u>Corolario</u>:

Todo polinomio con coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.

<u>Demostración</u>:

Por el corolario anterior el número de raíces complejas debe ser par y el número total de raíces, en base al T. F. A es igual al grado de la ecuación.

→ Corolario:

Los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son los de grado 1 y los de grado 2 de la forma $L(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) \qquad \alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Formula de Taylor Para Polinomios

Ejemplo:

Escribir el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x + 4$ en las potenciad de $(x-2)$.

Esto es $P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \dfrac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

O sea $a = 2$, luego

- $P(2) = 2.8 - 3.2 + 4 \Rightarrow P(2) = 14$

  $P'(x) = 6x^2 + 3$
- $P'(2) = 24 - 3 \Rightarrow \dfrac{P'(2)}{1!} = 21$
- $P''(x) = 12x \Rightarrow \dfrac{P''(2)}{2!} = \dfrac{24}{2.1} = 12$
- $P'''(x) = 12 \Rightarrow \dfrac{P'''(2)}{3!} = \dfrac{12}{3.2.1} = 2$

Luego $P(x) = 2x^3 + 3x + 4 = 14 + 21(x-2) + 12(x-2)^2 + 2(x-2)^3$

Raíces Múltiples:

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ son p distintas raíces de orden de multiplicidad $k_1, k_2, \ldots, k_p$ respectiva-mente: $p(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_p)^{k_p}$

$k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$

Mostraremos que

Teorema:

"si $P(x)$ tiene una raíz α de orden de multiplicidad $k > 1 \Rightarrow P'(x)$ tiene la misma raíz α de orden de multiplicidad $k-1$"

Demostración:

Sea $p(x) = a_0 (x-\alpha)^k Q(x) \quad / \quad Q(\alpha) \neq 0 \qquad (1)$

$Q(x)$ Es un polinomio de grado $(n-k)$ que no se anula para $x = \alpha$.

Puedo escribir $Q(x) = q_0 + q_1(x-\alpha) + \ldots + q_{n-k}(x-\alpha)^{n-k} \quad q_0 \neq 0 \quad pues\, Q(\alpha) \neq 0$

Pues α no es raíz $Q(x)$, como lo habíamos supuesto (los coeficientes q_i que puedan calcularse mediante la formula de Taylor)

Volviendo a (1) y reemplazando tengo

$$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x) = (x-\alpha)^k \left(q_0 + q_1(x-\alpha) + \ldots + q_{n-k}(x-\alpha)^{n-k}\right)$$

$$P(x) = q_0(x-\alpha)^k + q_1(x-\alpha)^{k+1} + \ldots + q_{n-k}(x-\alpha)^n$$

Derivando ambos miembros resulta:

$$P'(x) = k\, q_0 (x-\alpha)^{k-1} + (k+1) q_1 (x-\alpha)^k + \ldots + n\, q_{n-k}(x-\alpha)^{n-1} =$$
$$= (x-\alpha)^{k-1}\left[k\, q_0 + (k+1) q_1 (x-\alpha) + \ldots + n\, q_{n-k}(x-\alpha)^{n-k}\right]$$

El corchete no anula para $x = \alpha$, pues $q_0 \neq 0$

Este corchete es un cierto polinomio

$$Q_1(x) = k\, q_0 + (k+1)(x-\alpha) q_1 + \ldots + n\, q_{n-k}(x-\alpha)^{n-k} \qquad Q_1 \neq 0$$

Luego

$$P'(x) = (x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)$$

Queda probado el teorema.

Corolario:

Si $P(x)$ tiene una raíz α de orden de multiplicidad k y además $\alpha \neq 0$

Entonces

$$k > 1 \Rightarrow \begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \\ P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

La ecuación $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$ admite a $\alpha = 2$ como raíz múltiple.

Averiguar su multiplicidad.

2	1	−6	11	−2	−12	8
		2	−8	6	8	−8
2	1	−4	3	4	−4	0
		2	−4	−2	4	
2	1	−2	−1	2	0	
		2	0	−2		
2	1	0	−1	0		
		2	4			
	1	2	3			

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$

$\alpha = 2$ Es una raíz múltiple.

Mostraremos que $P'(x)$ admite a $\alpha = 2$ como raíz doble y $P''(x)$ admite a $\alpha = 2$ como raíz simple.

$P'''(x)$ No se anula para $\alpha = 2$

$P'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 4x - 12$

2	5	−24	33	−4	−12
		10	−28	−10	12
2	5	−14	5	6	0
		10	−8	−6	
2	5	−4	−3	0	
		10	12		
	5	6	9		

$P''(x) = 20x^3 - 72x^2 + 66x - 4$

2	20	−72	66	−4
		40	−64	4

2	20	-32	2	0
		40	16	
2	20	8	18	

$$P'''(x) = 60x^2 - 144x + 66$$

2	60	-144	66
		120	-48
	60	-24	18

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- Algebra y Geometría de Samuel Selzer. Editorial Nigar SRL. 1981
- Introducción a las Matemáticas Universitarias. Piotr Marian Wisniewski, Ana Laura Gutierrez Benegas. Editorial Mc Graw Hill Interamericana. 2003
- Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Louis Leithold. Oxford University Press. 1994

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

FACULTAD DE AGRONOMIA Y AGROINDUSTRIAS

ÁLGEBRA - MATEMÁTICA I

Ingeniería en Alimentos, Plan 1998 adaptado al CCA

Licenciatura y Profesorado en Química

Notas sobre

Valores y Vectores Propios

Dra. Lucrecia Chaillou

Trabajo supervisado por: **Lic. Josefa Sanguedolce**

2008

VALORES Y VECTORES PROPIOS

1.1. Valores y vectores propios de un operador lineal. Espacio propio. Vectores propios asociados a valores propios diferentes.

La solución de numerosos problemas físicos que involucran sistemas eléctricos, biológicos, químicos, así como también problemas geométricos, genéticos, vibracionales, económicos, etc., requiere del cálculo o por lo menos la estimación de **valores y vectores característicos** de la matriz asociada al sistema lineal de ecuaciones del modelo matemático que representa al problema o sistema físico.

Sea T: V→V una transformación lineal, se busca un vector $\vec{v} \in V$/ T($\vec{v}$) y $\vec{v}$ sean paralelos. Para ello se deben encontrar el vector $\vec{v}$ y un escalar λ que cumplan:

$$T(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v} \qquad (1)$$

entonces el escalar λ es el **valor propio** (eigenvalor, autovalor, valor característico) de la transformación lineal T y $\vec{v}$ es el **vector propio** (eigenvector, autovector, vector característico) de T correspondiente al valor propio λ.

✓ *El vector propio $\vec{v}$ es distinto de $\vec{0}$, puesto que en caso de serlo la ecuación (1) se cumpliría para todo λ y no se obtendría ninguna información útil.*

Los vectores propios de T correspondientes a λ son los vectores diferentes de 0 en el núcleo (T-λI). Este núcleo se denomina **espacio propio** de T correspondiente a λ.

Consideremos el siguiente ejemplo: calcular los valores, vectores y espacios propios de: T: $|R^2 \to |R^2$/T(x,y)=(2x, x+3y)

Aplicando la ecuación (1): T(x,y)= λ (x,y) para $\lambda \in |R$ y para x o y distintos de 0. Utilizando la definición de la transformación lineal y por igualdad de pares ordenados, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x = \lambda x \quad \text{si } x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ X+3y = \lambda y \Rightarrow x+3y = 2y \Rightarrow x = -y \text{ o lo que es lo mismo } y = -x \end{cases}$$

Por lo tanto todo vector de componentes opuestas (x,-x) con $x \neq 0$ es *un vector propio que pertenece al valor propio 2.*

El espacio propio de T correspondiente a $\lambda=2$ tiene la base $B_1=\{(1,-1)\}$

Si x=0 entonces en la segunda ecuación del sistema se tiene $3y = \lambda y \Rightarrow \lambda=3$, entonces los vectores de la forma (0,y) con $y \neq 0$, son los *vectores propios que pertenecen al valor propio 3.*

El espacio propio de T correspondiente a $\lambda=3$ tiene la base $B_2=\{(0,1)\}$

1.2. Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Ecuación característica. Polinomio característico.

Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, el número λ (que puede ser real o complejo) se denomina **valor propio** de A si existe algún vector $\vec{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \qquad (2)$$

El vector $\vec{x}$ es un **vector propio** de A correspondiente al valor propio λ.

Esta definición es válida si $A \in \mathbb{C}^{nxn}$, además una matriz puede tener valores y vectores propios complejos.

Si la matriz A fuera la matriz identidad I, $A = I \Rightarrow \forall \vec{x} \in R^n : A\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$, entonces el único valor propio de A=I es $\lambda=1$ y todo $\vec{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de I.

Si λ es un valor característico, entonces existe un $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ tal que: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Si trasponemos todo al primer miembro:

$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$ y como $\vec{x} = I\vec{x}$, se puede escribir: $A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0}$, factoreando:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \qquad (3)$$

Como $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, la ecuación (3) representa un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$. Estos sistemas siempre tienen solución trivial, pero a los fines prácticos, esta solución no es relevante. Se necesita encontrar una solución diferente de cero, entonces, se debe forzar al sistema a que sea *compatible indeterminado* (infinitas soluciones). Para ello igualamos a cero el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, es decir:

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

Esta expresión se denomina **ecuación característica** de A, los escalares que satisfacen esta ecuación son los valores propios de A.

Si la matriz A es de la forma: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ y desarrollamos $|(A - \lambda I| = 0$

$$|(A - \lambda I| = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

que se puede escribir como: $p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0$ (4)

Donde p(λ) es el **polinomio característico** de A, la solución de la ecuación (4), que es la ecuación característica desarrollada, proporciona los valores de λ que permiten obtener una solución diferente a la trivial.

Entonces si A es una matriz n x n:

λ es un valor propio de A ⇔ p(λ)= det (A - λ I) = 0 (5)

Los escalares λ que se obtienen de resolver (4) son los *valores propios* del sistema, el vector que se obtiene al sustituir un valor de λ se denomina *vector asociado al valor propio λ.*

Todo polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n raíces (por el Teorema Fundamental del Algebra) y como todo valor propio de A es raíz de la ecuación característica de A, se puede enunciar que:

- ✓ *Toda matriz de nxn tiene exactamente n valores propios incluyendo las multiplicidades.*

Se puede demostrar que si A es una matriz n x n, λ_1, λ_2, ..., λ_n son sus valores propios diferentes con los correspondientes vectores característicos x_1, x_2,..., x_n, entonces estos vectores son linealmente independientes.

- ✓ *Los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes (ninguno es múltiplo escalar del otro) y además pertenecen a los espacios propios de A correspondientes a cada λ. Este es el espacio de soluciones de la ecuación* $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Si alguna de las raíces de la ecuación característica están repetidas y λ_1, λ_2,..., λ_m (m < n) son las raíces distintas de la ecuación (4) con las multiplicidades k_1, k_2, ..., k_m respectivamente, entonces la ecuación (4) se puede factorizar como:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0$$

Los números k_1, k_2, ..., k_m son las multiplicidades algebraicas de los valores λ_1, λ_2, ..., λ_m, respectivamente.

Por ejemplo si deseamos calcular los valores propios de la matriz A= $\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$, planteamos:

$$(A - \lambda\ I) = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-\lambda & -18 \\ 6 & -11-\lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es:

$|(A - \lambda\ I| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -18 \\ 6 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0$, resolviendo se tiene: $(10 - \lambda)(-11 - \lambda) + 108 = 0$, es decir: $-110 + \lambda + \lambda^2 + 108 = 0$, que reordenando es: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ y cuyas raíces son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2= -2$ que son los valores propios de A.

1.3. Método para calcular los valores y vectores propios

Se pueden enunciar los siguientes pasos del método para calcular los valores y vectores propios:

1. Se encuentra el polinomio característico *$p(\lambda)= det\ (A - \lambda\ I)$*
2. Se calculan las raíces λ_1, λ_2, ..., λ_m de la ecuación *$p(\lambda)=0$*
3. Se resuelve el sistema homogéneo *$(A - \lambda_i\ I)$* $\vec{x}$ que corresponde a cada valor propio λ_i.

Considerando el ejemplo anterior, los valores propios de A son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2= -2$.

Resolviendo para $\lambda_1=1$:

$(A - \lambda_i\ I)$ $\vec{x} = \vec{0}$, reemplazando: $\left(\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 9 & -18 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9x_1 - 18x_2 \\ 6x_1 - 12x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 - 18x_2 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto cualquier vector propio que corresponde a $\lambda_1=1$ satisface a $9x_1-18x_2=0$ y $6x_1-12x_2=0$, de ambas se deduce que $x_2 = \frac{1}{2}x_1$, entonces un vector propio correspondiente a λ_1 tiene las siguientes componentes:

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

otro ejemplo, $x_1 = 2 \Rightarrow x_2=1$, que es otro vector propio correspondiente a λ_1, etc.

Entonces se puede decir que $E_1= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\rangle$ es el espacio generado por los vectores (1,1/2), (2,1), etc. La base del espacio es $B_1 = \{(1,1/2)\}$

Análogamente si $\lambda_2= -2$, se tiene:

$$\left(\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\begin{bmatrix} 12 & -18 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12x_1 - 18x_2 \\ 6x_1 - 9x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 12x_1 - 18x_2 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases}$, resolviendo se llega a que $x_2 = \frac{2}{3}x_1$ por lo tanto la base del espacio generado es $B_2 = \{(1,2/3)\}$

- ✓ *Los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes puesto que ninguno de ellos es múltiplo escalar del otro y en consecuencia constituyen una base de los espacios propios.*

1.4. Matrices diagonalizables. Propiedades.

La matriz asociada a una transformación lineal T: V→V, depende de la base elegida para el espacio V. Podemos definir a las matrices similares como:

- ✓ *Se dice que dos matrices A y B de orden nxn son similares, semejantes o equivalentes si existe una matriz invertible C de orden nxn tal que:* $B=C^{-1}AC$

La función dada por la ecuación de la definición anterior que transforma a la matriz A en B se denomina transformación de similaridad y puede denotarse como: $T(A)= C^{-1}AC$.

Si A es semejante a B, entonces existe una matriz invertible C tal que $A= C^{-1}BC$ (a), además si B es semejante a A existe una matriz invertible C tal que $B= C^{-1}AC$, y como de la ecuación (a) puede CA=BC, se puede afirmar que si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.

- ✓ *Dos matrices son similares o semejantes si y solo si representan la misma transformación lineal relativa a diferentes bases.*

Teorema: *si A y B son matrices similares n x n, entonces A y B tiene la misma ecuación característica y por lo tanto tiene los mismos valores propios.*

Demostración:

Como A y B son similares, $B= C^{-1}AC$

$\det (B - \lambda I)= \det (C^{-1}AC - \lambda I)= \det (C^{-1}AC - C^{-1}\lambda I C)= \det [(A - \lambda I)C]=$

$= \det (C^{-1}) \det(C) \det (A - \lambda I)=$

$= \det (C^{-1}C) \det (A - \lambda I)=$

$= \det I \det (A - \lambda I)= \det (A - \lambda I)$

- ✓ *Esto significa que A y B tienen la misma ecuación característica y como los valores característicos son las raíces de dicha ecuación, se deduce que los valores característicos de A y B son los mismos.*

En muchas aplicaciones resulta de gran utilidad diagonalizar una matriz, es decir, encontrar una matriz diagonal que sea similar a A.

Definición: *una matriz de orden n x n es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A sea similar a D.*

De esta definición se puede inferir que A es diagonalizable si y solo si existe la matriz C tal que $C^{-1}AC=D$, con D matriz diagonal. C es la matriz que diagonaliza a A. Si D es una matriz diagonal, entonces sus valores característicos son sus componentes diagonales. Además si A es similar a D, entonces A y D tiene los mismos valores característicos, por lo tanto si A es diagonalizable, entonces A es similar a una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores característicos de A.

Teorema: *una matriz A de orden n x n es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores característicos linealmente independientes. Si este es el caso, la matriz diagonal D, que es similar a A, está dada por* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$*, donde λ_1, λ_2,..., λ_n son los valores característicos de A. Si C es una matriz cuyas columnas son los vectores característicos de A linealmente independientes, entonces D= $C^{-1}AC$.*

Como consecuencia de este teorema se puede enunciar el siguiente corolario:

Corolario: *si la matriz A de orden n x n tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.*

El recíproco del corolario no es válido.

Este teorema permite escribir un algoritmo para diagonalizar una matriz A de orden n x n.

1) Obtener los valores propios de A
2) Si A no tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces A no es diagonalizable.
3) Si A tiene n vectores propios linealmente independientes, x_1, x_2,..., x_n, entonces sea C la matriz cuya columna i-ésima es el vector x_i. La matriz C diagonaliza a A.

Cabe aclarar que ni C ni los vectores propios son únicos.

Por ejemplo, se desea determinar si la matriz A=$\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$es diagonalizable y encontrar la matriz C que logra diagonalizarla si A es diagonalizable.

En el ejemplo del apartado 1.2, se determinó que los valores propios de esta matriz son: λ_1=1 y λ_2= -2. Por el corolario anterior se puede afirmar que A es diagonalizable, además algunos de sus vectores característicos son (2,1) y (3,2) correspondientes a estos valores propios.

Se forma la matriz C=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ con esos vectores característicos, se calcula $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, luego se calcula el producto $C^{-1}AC$= $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, que se desarrolla como:

$C^{-1}AC$=$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, la matriz resultante tiene como elementos diagonales a los valores propios de A y es la matriz diagonal D similar a A.

1.5. Operadores lineales diagonalizables

Lo expresado para matrices diagonalizables es válido para diagonalizar la matriz estándar de una transformación lineal.

1.6. Diagonalización ortogonal

Aceptando sin demostración los siguientes teoremas:

Teorema 1: *la ecuación característica de una matriz simétrica (real) A tiene sólo raíces reales.*

Teorema 2: *los autovectores de una matriz simétrica que corresponden a valores propios diferentes son ortogonales.*

Estos teoremas indican que todos los autovalores de una matriz simétrica A de orden n x n son números reales y que esta tiene n autovectores perpendiculares entre sí. A estos n vectores se los puede normalizar y obtener una base ortonormal de $|R^n$ que esta formada por los n vectores propios de A. Así A es diagonalizable y se puede encontrar una matriz diagonalizante C tal que D= $C^{-1}AC$, cuyas columnas son los vectores de la base para $|R^n$. La matriz C es matriz ortogonal y A es **ortogonalmente diagonalizable**.

Teorema: *una matriz simétrica real de n x n es ortogonalmente diagonalizable si y solo si existe una matriz ortogonal C tal que D= $C^{-1}AC$, en donde D es una matriz diagonal.*

El recíproco de este teorema es válido, es decir si D= $C^{-1}AC$ es una matriz diagonal y C es una matriz ortogonal, entonces A es simétrica. La ecuación D= $C^{-1}AC$ es una diagonalización ortogonal de A.

Nota: un ejemplo de resolución se presenta en la Guía de Ejercicios Resueltos Nº 9

1.7. Métodos iterativos para calcular los valores propios de matrices: Método de las potencias

Supongamos que los valores propios de A de orden n x n son λ_1, λ_2,..., λ_n, donde:

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Es decir λ_1 es el valor propio dominante. Si A es diagonalizable, es decir tiene los n valores propios diferentes, esto implica que A tiene n vectores propios linealmente independientes v_1, v_2, ..., v_n, donde v_1 corresponde a λ_1, v_2 a λ_2, etc. Sea x_0 un vector cualquiera de $|R^n$, el hecho de que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sea linealmente independiente implica que se puede expresar como combinación lineal de estos vectores, es decir:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \qquad (5)$$

Si suponemos que $\alpha_1 \neq 0$, se define una sucesión de iteraciones por medio de la ecuación de recurrencia: $x_{n+1}=A\,x_n$.

Para generar esta sucesión, se multiplica por A ambos miembros de la ecuación (5) y se tiene:

$$x_1 = Ax_0 = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \cdots \alpha_n Av_n = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v_j$$

Si se sigue multiplicando por potencias de A se encuentra que:

$$x_2 = Ax_1 = A^2 x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j A v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v_j$$
$$\vdots$$
$$x_k = A^k x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v_j$$

Si se factorea λ_1^k de cada término del lado derecho de las ecuaciones anteriores para normalizar al vector obtenido, resulta:

$$x_k = A^k x_0 = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k v_j$$

El hecho de que $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ para toda j=2,3, ..., n, implica que: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) = 0$, es decir que para valores grandes de k el vector:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \alpha_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k v_3 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n$$

converge hacia $\alpha_1 v_1$ si $\alpha_1 \neq 0$, entonces: $x_k = A^k x_0 \approx \lambda_1^k \alpha_1 v_1$.

$$\text{Si} \quad v_1 = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^k \alpha_1 v_1 = \begin{bmatrix} \lambda^k \alpha_1 v'_1 \\ \lambda^k \alpha_2 v'_2 \\ \vdots \\ \lambda^k \alpha_n v'_n \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $v_j \neq 0$, se puede formar el cociente:

$$\beta_j^{k+1} = \frac{j-\text{ésima componente de } A^{k+1}x_0}{j-\text{ésima componente de } A^k x_0} \approx \frac{\lambda_1^{k+1}\alpha_1 v'_j}{\lambda_1^k \alpha_1 v'_j} = \lambda_1,$$ de esta manera se obtiene un vector propio correspondiente a λ_1.

El valor propio λ_1 se obtiene con:

$$\lambda_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{(A^{k+1}x_0)_j}{(A^k x_0)_j}, \; j = 1, 2, 3, ..., n$$

donde j indica la j-ésima componente del correspondiente vector. Este es un método para calcular λ_1. La velocidad de convergencia está dada por el cociente λ_2/λ_1 siendo λ_2 el valor propio siguiente a λ_1 en valor absoluto, la convergencia es más rápida cuanto más pequeño es este cociente.

- ✓ *El vector inicial x0 debe elegirse distinto al vector nulo, a menudo se utiliza el vector (1,0,0,...,0).*
- ✓ *Se repite el proceso hasta que la diferencia en valor absoluto entre los valores propios obtenidos en dos iteraciones sucesivas sea menor que un valor de tolerancia preestablecido.*
- ✓ *Se aplica este método a matrices que tiene un valor característico dominante, pero se puede aplicar aún cuando la matriz A no sea diagonal dominante.*

Nota: un ejemplo de resolución se presenta en la Guía de Ejercicios Resueltos Nº 9

Bibliografía

- Ruffiner I.; Etchemaite, L.; Martinelli, M. 2000. *Álgebra Lineal con Geometría.* Tomo II. Buenos Aires, Argentina.
- Anton, H. 1997. *Introducción al Álgebra Lineal*. Limusa-Noriega Editores, Distrito Federal, México.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

FACULTAD DE AGRONOMIA Y AGROINDUSTRIAS

ÁLGEBRA - MATEMÁTICA I

Ingeniería en Alimentos, Plan 1998 adaptado al CCA

Licenciatura y Profesorado en Química

GUIAS DE TRABAJOS PRACTICOS

Equipo Cátedra

Lic. Josefa Sanguedolce

Lic. Maria Luisa Avila

Dr. Lucrecia Lucía Chaillou

Sr. Hernán Chiffarelli

2008

TRABAJO PRACTICO Nº 1

El Conjunto de los Números Complejos

1.- Dados los siguientes complejos: $z_1 = (-1, 1)$; $z_2 = (1, 2)$; $z_3 = 4 + i^{35}$

a) Represéntelos en el plano de Gauss.

b) Determine el opuesto, el conjugado y el inverso multiplicativo.

c) Resuelva las siguientes operaciones en forma binómica.

b.1) $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2} - (z_3)^2}{z_3}$ b.2) $\dfrac{(-z_1) \cdot (z_2)^2 + i^{59} \cdot \overline{z_3}}{\overline{z_1} + \overline{z_3}}$ b.3) $\dfrac{(z_1 - z_2)^2 \cdot \overline{z_3}}{z_3}$

2.-Sean los complejos:

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$; $z_3 = -1 + i$; $z_4 = \left(5 / \frac{\pi}{2}\right)$; $z_5 = \left(\frac{3}{2} / \frac{\pi}{3}\right)$

a) Encuentre la forma binómica o polar según corresponda.

b) Resuelva en forma polar las siguientes operaciones.

b.1) $z_1 . z_3$ b.2) $z_3 : z_1$ b.3) $z_1 . z_3 : z_2^2$

b.4) z_1^3 b.5) $\sqrt{z_2}$ b.4) $z_1^3 : \sqrt{z_2}$

3.- Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z : \left(\sqrt{2} / 3\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2} / \frac{\pi}{2}\right) . \left(2\sqrt{2} / 5\frac{\pi}{2}\right)$ b) $z^3 . \left(2 / \frac{\pi}{3}\right) = \left(4 / 4\frac{\pi}{3}\right)$ c) $z^6 = \left(\sqrt{2} / \frac{\pi}{4}\right)$

4.- Determine los puntos del plano caracterizados por los siguientes conjuntos:

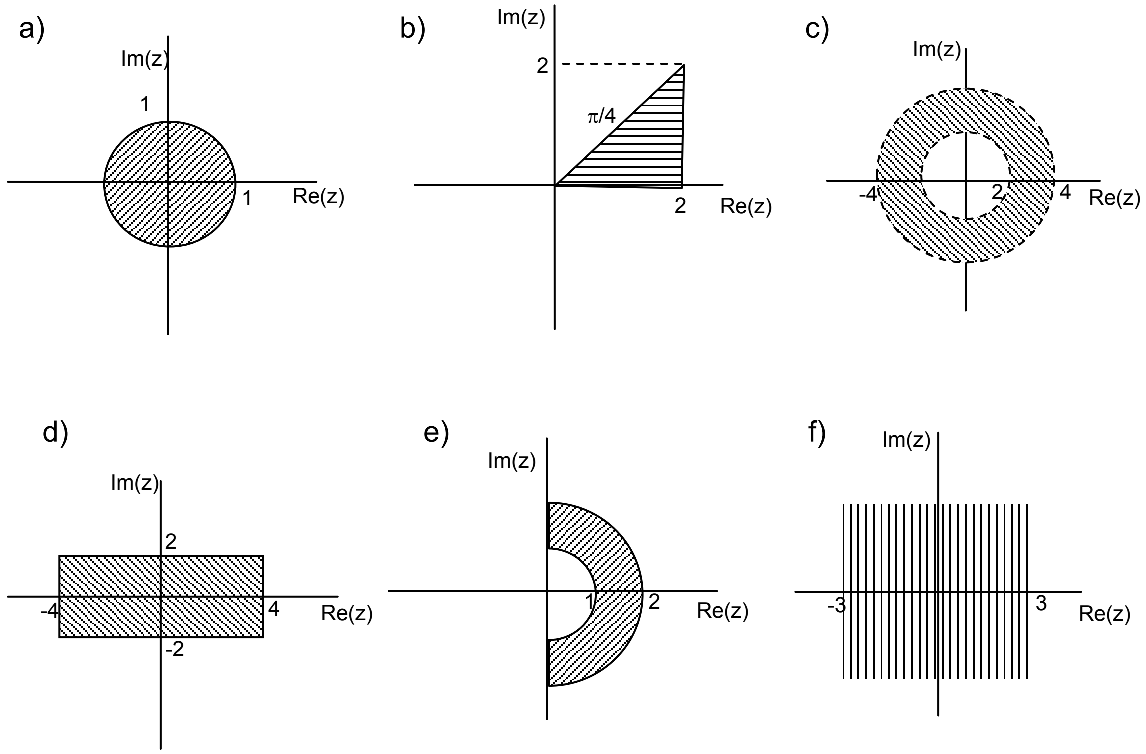
a) $A = \{ z \in C \,/\, \rho \leq 3 \;\wedge\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \}$

b) $B = \{ z \in C \,/\, \rho > 2 \;\wedge\; \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \}$

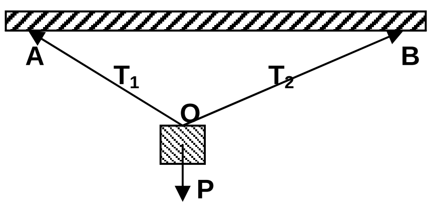
c) $C = \{ z \in C \,/\, \rho > 3 \;\wedge\; -2 < \mathrm{Im}(z) \leq 3 \}$

d) $D = \{ z \in C \,/\, -1 < \mathrm{Re}(z) \leq 2 \;\wedge\; 0 < \mathrm{Im}(z) \leq 1 \}$

5.- Dadas las siguientes regiones del plano, determine las condiciones que cumplen los complejos que pertenecen a la misma.



6.- Un bloque de 100 Kg se cuelga de un cable que esta aplicado en O, sostenido por otros dos cables fijos en el techo como indica la figura. Sin considerar el peso de los cables, hallar las tensiones que soportan los cables AO y BO.



$A = (\,|T_1|\,/\,120º\,)$

$B = (\,|T_2|\,/\,30º\,)$

7.- Un circuito eléctrico posee una resistencia de 4 Ω en serie con un inductor que presenta una reactancia de 3 Ω. Indique la impedancia como un número complejo en forma polar y represente gráficamente la solución.

8.- Calcule la impedancia de un circuito RLC, en el que la resistencia es 2 Ω y el inductor y capacitor poseen reactancias de 4 y 12 Ω, respectivamente.

9.- Si la corriente de un circuito es 3,9-6i mA y la impedancia es 5+1,4i kW, ¿cuál es la magnitud del voltaje?

TRABAJO PRACTICO Nº 2

Ceros de la Función Polinomial

1.- Indique para cada polinomio a) su grado, b) el coeficiente principal, c) P(2) y d) P(-1)

a) $P(x)=x^3-3x^2+x-5$ b) $P(u)=\sqrt{5}-u^3$ c) $P(t)=8$

d) $P(z)=-z^4-3z^2+5$ e) $P(t)=0$ f) $P(x)=3x^{12}-x^4-5x^2+3$

2.- Encuentre el valor de a, b, c, d para que P(x)=Q(x), siendo:

$P(x)= a+(a-b)x+(b-c)x^2+dx^3$ y $Q(x)= 5+11x-8x^2-x^3$

3.- Determine si los números dados son ceros del polinomio:

a) 1,2,3 de $P(x)=x^3-2x^2-2x-3$; b) 1,-1, 2 de $F(x)=3x^4-2x^2-2x-3$

c) 1,2i y -2i de $Q(x)= x^3-x^2+4x-4$ d) $(1 - i)$ de $C(x)$ $x^2 +(-1 - i)x +(2 + 2i)$

4.- Utilizando la regla de Ruffini calcule el cociente y el resto de la división de P(x) por Q(x).

a) $P(x)=x^3+8$ $Q(x)=x+2$ b) $P(x)=5x^3+4x-3$ $Q(x)=x+3$

c) $P(x)= 5x^3+4x-9$ $Q(x)=x-1$ d) $P(x)=(2-i)x^4+(1+2i)x^2+3ix-5$ $Q(x)=x+2i$

5.- Utilice el teorema del residuo para encontrar el valor del polinomio para el número dado.

i) $P(x)=x^4+3x^3+x^2+x-6$, a) P(2) b) P(-3)

ii) $P(x)=x^3-3x^2+x+1$, a) P(1) b) P(-1) c) P(5) d) P(-2)

6.- Indique si cada binomio dado es un factor de $P(x)=2x^3-x^2-15x+18$

a) (x-7) b) (x-2) c) (x-1) d) (x-3/2)

7.- Determine el número posible de soluciones diferentes para cada ecuación polinómica

a) $3x^3-x^2+5=0$; b) $12x^7-5x^4+x^3-2x^2+7x-1=0$

8.- Encuentre:

a) una ecuación polinomial que tenga a -2 como raíz doble, a 4 como raíz triple y a 1 como raíz simple.

b) un polinomio, P(x) de grado 3 con coeficientes reales tal que la ecuación P(x)=0 tenga a 3 y a 1+i como raíces.

c) el polinomio que tenga coeficientes reales y cumpla con las siguientes condiciones:

c_1) P(1)=0, P(-3)=0, a=-3 raíz doble, P(0)=-9

c_2) a=i raíz simple, a=2 raíz doble, P(1)=2

c_3) a=i raíz doble, a=-1 raíz simple, P(2)=75

9.- Verifique que los siguientes valores constituyen la cota inferior y superior de las raíces de las ecuaciones polinómicas:

a) -2 y 3; $3x^4-5x^3+19x^2-35x-14=0$ b) -1 y 1; $4x^4+7x^2-2=0$

10.- Dado los polinomios indique la cota inferior y superior de sus soluciones racionales:

a) $P(x)= 4x^3-4x^2-x+1$ b) $Q(x)= x^3-5x+1$ c) $R(x)= x^5+4x^4-7x^2-40x+1$

11.- Calcule los ceros racionales de los polinomios que se detallan a continuación siendo **a** raíz del mismo. Factorice el polinomio.

a) $P(x)=2x^4-18x^3+34x^2+66x-180$, a=3, raíz doble b) $P(x)= x^4+4x^3-2x^2-12x+9$, a=1, raíz doble

c) $P(x)= x^3+3x^2-4$, a=1, raíz simple

12.- Realice la descomposición factorial de: a) $P(x)=x^6-x^5+x^4-x^3$ b) $Q(x)=3x^3+15x+18$

13.- Determine los valores de a y b para que la ecuación $ax^2+bx+2=0$ tenga como raíces a 1 y 2.

14.- Construya un polinomio de 3er grado cuyas raíces sean -1; 3; 4 y sus coeficientes directores: i) $a_0 = 2$ ii) $a_0 = -1$

15.- Haga una lista de las posibles soluciones racionales de la ecuación $P(x)= 2x^4-3x^3+2x^2-6x-4=0$

16.- Encuentre todas las soluciones racionales de $P(x)=x^3-5x^2+x+2$

17.- Determine las raíces de las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^4-20x^2+64=0$ b) $x^6+63x^3-64=0$ c) $2x^7-5x^5+2x^3=0$

d) $x^4+3x^3-4x^2=0$ e) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ f) $2x^4+3x^3+5x^2+3x+2=0$

18.- La altura en pies de un objeto impulsado hacia arriba con una velocidad inicial de 240 pies/s desde una altura inicial de 1600 pies puede expresarse como un polinomio en la variable t (tiempo) por $h(t)=-16t^2+240t+1600$. Demuestre que 20 s es un cero e interprete este resultado.

19) El análisis de una ecuación que relaciona la distancia x con el tiempo t, reveló que un objeto viajó una distancia de 0m cuando t = 10s. Las otras dos raíces de la ecuación fueron complejas y una de ellas es $-1 + i$. Determinar la ecuación que expresa a la distancia en función del tiempo.

20) El costo total C para elaborar un producto, en x unidades se puede calcular mediante la ecuación $C = x^3 - 90x^2 + 8000x + 300.000$. Encontrar la cantidad de unidades que se pueden realizar, si el monto disponible es de \$ 330.624

TRABAJO PRACTICO Nº 3

Matrices – Operaciones - Propiedades

1.- Escriba explícitamente las matrices definidas por:

a) $A \in R^{3x4}$ / $a_{ij} = i+j$
b) $A \in R^{4x4}$ / $a_{ij} = 0$ si $i \leq j$, $a_{ij} = -i.j$ si $i > j$.

2.- Encuentre las incógnitas, si: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 6 \\ -1 & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a-b \\ 2c+d & -3 \end{pmatrix}$

3.- Dadas las siguientes matrices reconozca a qué tipo corresponde cada una de ellas.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4.-Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calcule si es posible:

a) $(A + B).(B - C)^t$
b) $(3A - 2C + 4B) . (3C - A)$
c) $\frac{1}{2}B . (-2A - 5C)$
d) Determine si: $B - A = -(A - B)$
e) $D . E^t$

f) Compruebe que:
1) $A.(B + C) = A . B + A C$
2) $(A + B) . C = A . C + B. C$
3) $(A . B) . C = A . (B . C)$
4) $(h A) . B = h (A.B) = A (hB)$ con $h = 2$
5) $(A.B)^t = B^t .A^t$

5.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $f(x) = x^4 + x^2 - 2$. Calcule f(A).

6.-Calcule los productos A.B y B.A cuando estén definidos:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1/4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

7.-Compruebe que B es la inversa de A. Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

8.- Encuentre la inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}i & 2\\ 1 & -i\end{pmatrix}$$

9.- Se realiza un experimento durante dos meses, en el que se fertilizan, tres tipos de plantas frutales, con dos tipos diferentes de fertilizantes. El suministro mensual de los fertilizantes se registra en las dos siguientes matrices, donde el elemento a_{ij} representa la cantidad de fertilizante i suministrado en la planta j.

$$A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 0.2\\ 0.5 & 0.3 & 0.7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0.6 & 0.8 & 0.2\\ 0.7 & 0.4 & 0.9\end{pmatrix}$$

a) ¿Encuentre la cantidad total de fertilizante suministrado a cada planta durante los dos meses?
b) ¿A que planta se le suministro mayor cantidad de fertilizante?
c) ¿Qué representa el elemento a_{23}?

10.- Los tiempos requeridos por dos maquinas, para cosechar una hectárea de sorgo, maíz, trigo y algodón, son los representados por la siguiente matriz, donde a_{ij} representa el tiempo requerido por la maquina i, para cosechar el producto j.

$$A=\begin{pmatrix}0.9 & 0.9 & 1.1 & 2.1\\ 0.5 & 0.4 & 0.6 & 1.0\end{pmatrix}$$

¿Qué tiempo requerirá cada maquina, para cada artículo, si se desea cosechar 200has de cada uno de ellos?

11.- El encargado de materias primas de una fábrica de conservas debe comprar zanahorias, papas y arvejas para elaborar jardinera de hortalizas. En la tabla que se presenta a continuación se indica el precio por kg, dado por tres proveedores, de cada una de las hortalizas mencionadas.

Proveedor	**Zanahorias**	**Papas**	**Arvejas**
A	2,50	1,25	1,50
B	2,60	1,00	1,20
C	2,40	1,10	1,40

Si debe comprar 300 kg de zanahorias, 500 kg de papas y 100 kg de arvejas, en uno de los tres proveedores, ¿cuál de ellos ofrece el precio más económico?

TRABAJO PRACTICO Nº 4

Función Determinante- Propiedades- Aplicaciones

1.- Evalúe el determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ utilizando el método de cofactores por expansión a lo largo de: a) 1º fila; b) 2º fila; c) 2º columna; 3º columna.

2.- Calcule el determinante de los siguientes determinantes realizando la expansión a lo largo de las líneas indicadas:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 3º columna; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ 3º fila; c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2º columna.

3.- Calcule el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -7 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

4.- Compruebe las siguientes identidades:

a) $\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 1/4 & -x \end{vmatrix} = (x+\frac{1}{2})^2$ b) $\begin{vmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c$

5.- Halla el menor complementario y el cofactor de cada uno de los elementos del determinante asociado a la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

6.- Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 - x$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & a & a \\ a & x-1 & a \\ a & a & x-1 \end{vmatrix} = 0$

7.- Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con $|A|$ = ab+2, calcule el determinante de las siguientes matrices, utilizando $|A|$ y las propiedades de los determinantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & b & 0 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3a & 6 & 0 \\ -3 & 3b & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

8.-Calcular si es posible, la inversa de la matriz A mediante su adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

TRABAJO PRACTICO Nº 5

Sistemas de Ecuaciones

1.- Indique la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones y exprese el conjunto solución.

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+5y=3 \\ 5x+25y=15 \\ -x+5y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 5x-11y+9z=4 \\ 3x-7y+7z=k \\ x-y-3z=-1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x+8y+6z=20 \\ 4x+2y-2z=-2 \\ -6x+4y+10z=24 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x+8y+6z=20 \\ 4x+2y-2z=-2 \\ -6x+4y+10z=30 \end{cases}$

2.- Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} 2x+8y+6z=0 \\ 4x+2y-2z=0 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-2y+7z=0 \end{cases}$

3.- Determine para que valores de k el sistema $\begin{cases} x+(k+1)y+z=0 \\ x+y+(k+1)z=0 \\ (k+1)x+y+z=0 \end{cases}$ tiene solución distinta a la trivial.

4.- Determine el valor de v para que el sistema $\begin{cases} hx-y+2z=1+h \\ x+hy-z=-1 \\ 3x+y+z=h \end{cases}$, sea compatible determinado y compatible indeterminado.

5.- Balancee las siguientes ecuaciones químicas:

a) $N_2H_4 + N_2O_4 \rightarrow N_2 + H_2O$;

b) $Al + H_2O \rightarrow Al(OH)_3 + H_2$

c) $MnSO_4 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

6.- Un depósito A contiene 10 l de agua y 5 l de alcohol puro. El depósito B contiene 12 l de agua y 3 l de alcohol: Encuentre la cantidad de litros que se deben extraer de cada depósito para conseguir una solución de 8 l que contenga un 25% en volumen de alcohol.

7.- La solución de limpieza CIP (clear in place) de una fábrica de productos lácteos contiene 3 sustancias químicas, A, B y C, que se mezclan en la siguiente proporción: 10 partes de la sustancia A, 12 de la B y 8 de la C. La planta cuenta con un stock de bidones de soluciones de tres marcas diferentes, X, Y, y Z, cuya composición se indica en la tabla que sigue:

	Marca X	**Marca Y**	**Marca Z**
Sustancia A	1	2	3
Sustancia B	2	1	2
Sustancia C	1	3	1

¿En que proporción deben mezclarse para llegar a la concentración deseada?

TRABAJO PRACTICO Nº 6

Espacios Vectoriales

1- Determine cuales de los siguientes conjuntos con las leyes definidas es un espacio vectorial

a) A= $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in R^{2x2} / x, y \in R \right\}$ con la adición matricial y la multiplicación por un escalar ordinarias.

b) El conjunto de puntos de R^2 que se encuentran sobre una recta que contiene al origen de coordenadas, con las leyes usuales de suma de pares ordenados y producto de un escalar real por un par ordenado.

c) El conjunto de puntos de R^2 que se encuentran sobre una recta que no contiene al origen de coordenadas, con las leyes usuales de suma de pares ordenados y producto de un escalar real por un par ordenado.

2.- Investiga si los siguientes conjuntos son subespacio vectorial del espacio vectorial indicado.

a) $V = R^2_R$, $S = \{ (x,y) \in R^2 \ / \ y = 1 \}$

b) $V = R^2_R$, $S = \{ (x,y) \in R^2 \ / \ x = y \}$

c) $V = R^3_R$, $S = \{ (x,y,z) \in R^3 \ / \ x > 0 \}$

d) $V = R^3_R$, $S = \{ (x,y,z) \in R^3 \ / \ x + y = 0 \}$

e) $V = R^{3x1}_R$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^{3x1} \ / \ y = 0 \right\}$

f) $V = R^{3x3}_R$ $S = \{ [a_{ij}] \in R^{3x3} \ / \ a_{ij} = 0 \ , \ i > j \}$

3.- Halle las combinaciones lineales que resultan al considerar el conjunto de los vectores S ={ u , v } donde u = (0, 1, 3) y v = (-1,1,-1) y los números reales:

i) a = 8, b = -3
ii) a = 1, b = 0

4.- Si es posible, exprese v como combinación lineal de v_1 y v_2 . Represente gráficamente el apartado i).

i) V = (-8, 5) V_1 = (2, -1) V_2 = (-3, 2)

ii) V = (-1, 3) V_1 = (2, 4) V_2 = (2, -6)

iii) V= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ V_1 = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ V_2 = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

5.- Considere los vectores u= (1, -3, -2) y v = (2, -1, 1) de R^3

i) Escriba el vector (1, 7, 5) como combinación lineal de u y v.

ii) Determine el valor de K para que (1,K,5)sea combinación lineal de u y v.

6.- Determine si los siguientes pares de vectores son paralelos:

i) u = (2, 3, 4) y v = (1, 3/2, 2)

ii) u = (½ , 0) y v = (-1 , 1)

iii) u = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ y v = $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

7.- Determine el subespacio generado por A en cada caso:

a) En R^2

i) A= { (2,1) }

ii) A= {(1,1); (2,0)}

iii) A= {(2,0) ; (3,0)}

iv) A= {(1,2); (1,1); (-1,0)}

b) En R^3.

i) A= {(1,2,3)}

ii) A= {(0,1,0); (2,1,-1)}

iii)A= {(1,0,0); (2,1,3); (3,1,0)}

c) En R^{2x2}

$$i) A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$ii) A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} \right\}$$

8.- Determine el subespacio fila y columna de la matriz A.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9.- Proponga un generador para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales del espacio que se indica.

a) { (x,y) $\in$ R^2 / y - 2x =0} en R^2_R

b) $\{ (x,y) \in R^2 \ / x = -\frac{1}{3} y \}$ en R^2_R

c) $\{ (x,y,z) \in R^3 \ / \ x = 0 \ \wedge \ y = z \}$ en R^3_R

d) $\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R^{2x2} \ / \ a - b = 0 \ \wedge \ b = 2c \}$

10.- Determine cuáles de los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes:

i) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{2x1}

ii) {(1,0); (0,3); (1,1)} en R^2

iii) {(2,-1,0); (-1,5,3); (5,-7,-3)} en R^3

iv) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{2x2}

11.- Determinar en los siguientes casos los valores de k, para que los conjuntos sean linealmente dependientes.

i) $v_1 = (1, k)$ $\qquad v_2 = (k, 4)$
ii) $v_1 = (1,-1, k)$ $\qquad v_2 = (3, -k, 9)$

12.- Determine cuáles de los siguientes conjuntos es una base del espacio que se indica:

a) {(2,1); (3,4)} en R^2_R

b) {(1,1); (2,3); (0,1)} en R^2_R

c) {(1,7,1); (0,1,1); (0,1,1)} en R^3_R

d) {(1,2,-1); (0,3,1)} en R^3_R

e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{2x2}_R

f) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{2x2}

g) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{2x2}

h) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{3x1}

13.- Dados los siguientes subespacios de V. Determine una base para cada uno e indique su dimensión.

a) V = R^3
U = { (a, b, c) / b = 0 }
V = { (a, b, c) / a + b = 0 }
W = { (a, b, c) / a = b = c }

b) V = $R^{2x2}{}_R$ W = { $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ / a + b + c = 0 }

c) V = $R^{2x2}{}_R$ W = { $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ / a + d = 0 }

d) V = $C^2{}_C$ W = { (z, u) / z - 2u = 0 }

14.-Determine la dimensión de los subespacios generados del ejercicio (8) y establezca la relación entre la misma y el rango fila y el rango columna.

15.- En cada uno de los siguientes sistemas homogéneos: encuentre una base y la dimensión del espacio solución.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

16.- Dadas las bases de R^2: B_1 = { (2,0) , (0,1) } y B_2 = { (1,1) , (0,2) }

Encuentre las coordenadas de: v = (4,3) , u = (3,5) en ambas bases.

17.- Sea { (1,1,0) , (1,1,1) , (1,0,0) } una base ordenada de $R^3{}_R$.
Determine las coordenadas del vector v respecto de la base dada.

i) v = (-3, 1, 0); ii) v = (2, 2, 2); iii) v = (3, 2, 1); iv) v = (-2, 0, 1)

18.- Dada la base de R^{2x2} :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Encuentre las coordenadas del vector v = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ relativa a dicha base.

19.- Tres alimentos I, II, II, contienen cantidades de vitaminas A, B y C en mg/kg de alimento dadas en la tabla que sigue:

	Alimento I	**Alimento II**	**Alimento III**
Vitamina A	5	10	7
Vitamina B	12	5	4
Vitamina C	8	6	15

Si una persona necesita un aporte diario de las vitaminas mencionadas, (A,B,C)=(14,17,20), analice si el vector vitaminas es una combinación lineal del vector alimentos. En caso afirmativo, determine las cantidades mínimas de alimento I, II, III que se deben ingerir a diario.

20.- Una fábrica de alimentos balanceados elabora 3 mezclas básicas de alimento: A, B, C, con carnes, cereales y vegetales en las proporciones que se indica a continuación:

	Mezcla A	**Mezcla B**	**Mezcla C**
Carne	10	8	6
Vegetales	5	5	10
Cereales	20	18	20

A partir de esas mezclas básicas, la fábrica puede generar alimentos especiales según los requerimientos de sus clientes. Es decir los alimentos especiales pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan a las mezclas base. ¿Se podría elaborar un alimento que contenga 50 partes de carne, 18 partes de vegetales y 10 partes de cereales? Si es así, que cantidad necesita de cada una de las mezclas base?

TRABAJO PRACTICO Nº 7

Transformaciones lineales

1.- Determine si las siguientes aplicaciones son Transformaciones Lineales.

a.- T: $R^2 \longrightarrow R^3$ / T(x,y) = (x+y,x-y,y)

b.- T: $R^3 \longrightarrow R^2$ / T(x,y,z) = (x+1,y-z)

c.- T: $R^2 \longrightarrow R^{2x2}$ / T(x,y) = $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

d.- T: $R^{2x2} \longrightarrow R^2$ / $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = (a-b, C+d)

2.- Considere las T.L. del ejercicio anterior:

a.- Encuentre el Núcleo y la Imagen y sus respectivas dimensiones.
b.-Verifique : Dim V= Dim Nu + Dim Im.
c.- Clasifíquelas.

3.-Sea T: $R^2 \longrightarrow R^3$ una T.L. que verifica: T(1,0)=(1,2,3), T(0,1)=(0,-1,2)
Obtenga T(2,-3). Indique si existe algún vector de R^2 cuya imagen sea (0,0).

4.- Muestre que la T.L de $R^2 \longrightarrow R^2$ que verifica que T(1,0) = (1, 1), T(0,1)=(-1,2) transforma un cuadrado de vértices A=(1,0), B=(0,1), C=(0,0), D=(1,1)en un paralelogramo. Grafique.

5.- Sea T: $R^3 \longrightarrow R^2$ / T(x,y,z) = (x+z,y-z).

a.- Determine la matriz asociada a T respecto de las siguientes bases

B={(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)} en R^3 y B´ = {(2,0);(0,1)} en R^2

b.- Determine la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas de ambos espacios.

c.- Usando las matrices de los apartados anteriores encuentre T(1,2,3).

6.-Considerando las matrices asociadas a la T.L. del ejercicio anterior.

a.- Encuentre el núcleo.
b.- Encuentre la Imagen de la transformación.

TRABAJO PRACTICO Nº 8

<u>Espacios vectoriales con producto interior. Ecuaciones de la recta y del plano</u>

1.- Trace los siguientes vectores cuyo punto inicial se encuentra en el origen:

a) $\vec{v} = (3,6)$ b) $\vec{v} = (-4,-3)$ c) $\vec{v} = (3,4,5)$ d) $\vec{v} = (3,3,0)$

2.- Sean $\vec{u} = (-3,1,2)$, $\vec{v} = (4,0,-8)$ y $\vec{w} = (6,-1-1)$, encuentre las componentes de:

a) $\vec{v} - \vec{w}$ b) $6\vec{u} + 2\vec{v}$ c) $-\vec{v} + \vec{u}$ d) $5(\vec{v} - 4\vec{u})$

3.- Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ los vectores del ejercicio anterior. Calcule:

a) las componentes de $\vec{x}$ que satisface a $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$

b) los escalares a, b, c, tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (2,0,4)$

4.- Encuentre la norma de $\vec{v}$.

a) $\vec{v} = (4,-3)$ b) $\vec{v} = (2,3)$ c) $\vec{v} = (2,2,2)$ d) $\vec{v} = (-7,2,-1)$

5.- Sean $\vec{u} = (2,-2,3)$, $\vec{v} = (1,-3,4)$ y $\vec{w} = (3,6,-4)$, evalúe:

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ b) $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ c) $\|-2\vec{u}\| + 2\|\vec{u}\|$ d) $\dfrac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$

6.- Determine el versor de los siguientes vectores:

a) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ b) $\vec{v} = (1,2,2)$ c) $\vec{v} = (-3,4,5)$

7.- Calcule el producto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y el coseno del ángulo comprendido:

a) $\vec{u} = (2,3), \vec{v} = (5,-7)$ b) $\vec{u} = (-6,-2), \vec{v} = (4,0)$

c) $\vec{u} = (1,-5,4), \vec{v} = (3,3,3)$ d) $\vec{u} = (-2,2,3), \vec{v} = (1,7,-4)$

8.- Determine si los vectores forman un ángulo agudo, obtuso o bien son ortogonales.

a) $\vec{u} = (6,1,4), \vec{v} = (2,0,-3)$ b) $\vec{u} = (0,0,-1), \vec{v} = (1,1,1)$ c) $\vec{u} = (-6,0,4), \vec{v} = (3,1,6)$

9.- Indique si los siguientes vectores son paralelos u ortogonales:

a) $\vec{u} = (2,4), \vec{v} = (1,2)$ b) $\vec{u} = (3,6,12), \vec{v} = (1,2,4)$

10.- Establezca los ángulos y cosenos directores de: $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (1,1,2)$

11.- Encuentre la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$, la componente vectorial de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{a}$ y la norma de la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$

a) $\vec{u} = (6,2), \vec{a} = (3,-9)$ b) $\vec{u} = (-1,-2), \vec{a} = (-2,3)$ c) $\vec{u} = (3,1,-7), \vec{a} = (1,0,5)$

12.- Halle x,y $\in Z$ para que la proyección de $(\vec{a} - \vec{b})$ sobre $\vec{b}$ sea $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$, siendo $\vec{a} = (x,1,3), \vec{b} = (1,1,3)$

13.- Dados los vectores encuentre el ángulo entre los mismos sabiendo que la proyección escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es 1, $\vec{a} \bullet \vec{b} = -4$ y que $\|\vec{a}\| = 2$

14.- Sean $\vec{u} = (3,2,-1)$, $\vec{v} = (0,2,-3)$ y $\vec{w} = (2,6,7)$, calcule:

a) $\vec{v} \times \vec{w}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$

15.- Encuentre un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (-6,4,2)$, $\vec{v} = (3,1,5)$

16.- Encuentre el triple producto de $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$:

a) $\vec{u} = (-1,2,4)$, $\vec{v} = (3,4,-2)$ y $\vec{w} = (-1,2,5)$ b) $\vec{u} = (3,-1,6)$, $\vec{v} = (2,4,3)$ y $\vec{w} = (5,-1,2)$

17.- Un automóvil recorre 3 km hacia el Norte y luego 5 km hacia el Nordeste. Represente estos desplazamientos y encuentre el desplazamiento resultante gráfica y analíticamente.

18.- Un avión se mueve en dirección y sentido NO a una velocidad de 250 km/h, relativa a la Tierra, debido a la existencia de un viento hacia el Oeste con una velocidad de 50 km/h. Encuentre la velocidad, dirección y sentido del vector velocidad que llevaría el avión si es que no hubiera viento.

19.- Halle el área de:

a) un paralelogramo determinado por $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (0,3,1)$

b) un triángulo cuyos vértices son P(2,6,-1), Q(1,1,1) y R(4,6,2)

20.-Calcule el volumen de un paralelepípedo cuyos lados son: $\vec{u} = (2,-6,2)$, $\vec{v} = (0,4,-2)$ y $\vec{w} = (2,2,-4)$

21.- Encuentre las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesianas de la recta que pasa por el punto P y es paralela al vector $\vec{v}$.

a) $P(-2,-1), \vec{v} = (2,-5)$ b) $P(1,3), \vec{v} = (4,3)$ c) $P(3,-1,2), \vec{v} = (2,1,3)$

22.- A partir de las ecuaciones cartesianas de los ítems a y b del ejercicio anterior, exprese las ecuaciones implícita, explícita y segmentaria.

23.- Calcule las ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas de la recta que pasa por los puntos:

a) (-1,3) y (0,2) b) (2,-3) y (-2,-4) c) (5,-2,4) y (7,2,-4) d) (2,4,-1) y (5,0,7)

24.- Encuentre la ecuación de la recta:

a) de pendiente -3 y ordenada al origen 6

b) que pasa por p(4,1) y tiene ordenada al origen -1

c) de vector de dirección $\vec{a} = (-2,3)$ y ordenada al origen 5

d) que pasa por el punto (-3,4) y tiene pendiente 2/5

25.- Indique si las siguientes rectas son paralelas u ortogonales:

a) 2x-y=4, 5x+2y=19

b) (x,y)-(2,-3)=t(4,8), (x,y)-(1,4)=t(2,4)

c) 3x+4y+16=0, (x,y)-(5,7)=t(4,-3)

d) 2x-3y-4=0, 3x-2y+18=0;

26.- Encuentre:

a) la ecuación de la recta que pasa por el punto (6,2) y es perpendicular a la recta definida por la ecuación 4x+5y+7=0.

b) la ecuación de una recta que pase por el punto (6,2) y sea paralela a la recta dada y otra que pase por el mismo punto y sea perpendicular a la recta dada: (6,2), 4x+5y+7=0

27.- Determine las coordenadas del punto de intersección de las rectas:

a) 4x-5y=26; 3x+7y=-2 b) 2x-3y=6, x+y=3 c) 4x+3y=28, 2x-3y=5

28.- Calcule la distancia:

a) de la recta 5x-12y-26=0 a los puntos (3,5); (-4,1)

b) entre las rectas paralelas: 15x+8y+68=0 y 15x+8y-51=0

29.- Determine las ecuaciones de los siguientes planos:

a) el que pasa por (3,-1,7) y es perpendicular a $\vec{n} = (4,2,-5)$

b) el que pasa por los puntos P(1,2,-1); Q(2,3,1); R(3,-1,2)

30.- Indique si los planos dados son paralelos u ortogonales:

a) (-1,2,4)(x-5,y+3,z-7)=0; (2,-4,-8)(x+3,y+5,z-9)=0

b) 3x-4y+z=1 y 6x-8y+2z=3

c) (-2,1,4)(x-1,y,z+3)=0; (1,-2,1)(x+3,y-5,z)=0

d) 4x+2y-5z+25=0; 9x+y-5z-16=0

31.- Encuentre la distancia:

a) entre el punto P(03,-2) y el plano x-y-z=3

b) entre el punto Q(3,1,-2) y el plano x+2y-2z=4

c) entre los planos paralelos:

i) 3x-4y+z=1 y 6x-8y+2z=3

ii)-4x+y-3z=0 y 8x-2y+6z=0

32.- El costo de manufactura de 1000 kg de queso cremoso es $8500 mientras que se requieren $11500 para elaborar 2 tn de este tipo de queso. Suponiendo que la relación entre el costo y la producción es lineal, encuentre la relación, grafique e interprete la gráfica ¿Cuál será el costo si se desean producir 2500 kg?

TRABAJO PRACTICO Nº 9

Valores y Vectores propios

1.- Encuentre los valores y vectores propios de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x,y)=(y,x)$ b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x,y)=(4x + 3y,3x-4y)$

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x,y)=(x,2y)$

2.- Calcule los autovalores, autovectores y encuentre una base para los espacios generados por los vectores característicos de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.- Determine el polinomio característico, los eigenvalores y eigenvectores de cada una de las matrices que se presentan a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.- Determine si cada una de las matrices dadas a continuación es diagonalizable. Si lo es encuentre la matriz C y diagonalice la matriz en cuestión.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.- Utilizando el método de las potencias calcule el valor y vector característico dominante de:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

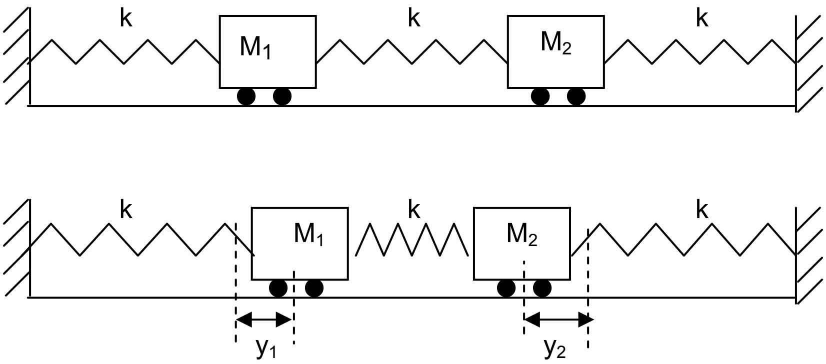
6.- Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x,y)=(x,4x)$, determine si existe una base de vectores propios de T y en caso afirmativo encuentre una matriz diagonal que represente a T.

7.- Encuentre la diagonalización ortogonal de las matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

8.- Calcule los valores y vectores propios de la matriz asociada del sistema cuyo esquema se muestra a continuación:

$$\begin{cases} -\omega^2 y_1 = \dfrac{k}{m} y_1 + \dfrac{k}{m} y_2 \\ -\omega^2 y_2 = \dfrac{k}{m} y_1 - 2\dfrac{k}{m} y_2 \end{cases}$$ que corresponde a un sistema formado por dos carros de igual masa unidos por resortes de constante k y fijados en ambos extremos.



TRABAJO PRACTICO Nº 10

Cónicas y Cuádricas

1.- Encuentre la ecuación de una circunferencia de:

a) radio 4 y centro (3,-2); b) radio 8 y centro (1,-2); c) radio 12 y centro (2,3)

2.- Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:
a) P=(1,-2); Q=(5,2) y R=(10,9) b) a) P=(2,-2); Q=(3,2) y R=(1,9)

3.- Determine la ecuación de una circunferencia tangente a la recta x -2y + 2=0 en el punto (2,3) cuyo centro se encuentra sobre la recta x + y=8.

4.- Halle la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas: x + 4y -6=0 y 2x – 4y – 2=0

5.- Escriba la ecuación de una parábola con vértice en el origen de coordenadas y el foco en (0,5).

6.- Una parábola tiene su vértice en el origen de coordenadas, su eje a lo largo del eje x y pasa por el punto P. Encuentre su ecuación:
a) (-2,4) b) (2,3) c) (4,8) d) (3,5).

7.- Dada ecuación de una parábola, encuentre las coordenadas del foco, la ecuación directriz y la longitud del lado recto:
a) $x^2= -4y$ b) $x^2= -8y$ c) $x^2= 16y$ d) $x^2= 32y$

8.- Calcule las coordenadas del vértice, el foco y la longitud del lado recto de las siguientes ecuaciones de parábolas:
a) $y^2 +8x - 2y +25=0$ b) $y^2 +8x + 8=0$ c) $y^2 -12x - 48=0$

9.- Indique la ecuación de una elipse con focos en $(0,\pm4)$ y un vértice en (0,5)

10.- Encuentre la ecuación de la elipse con focos en (4,-1) y (8,-1) y un vértice en (10,-1)

11.- Dadas las siguientes hipérbolas, determine las coordenadas de los vértices y de los focos, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de las asíntotas.
a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{64}=1$ c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ d) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$

12.- Encuentre la ecuación de una superficie generada por una recta que forma un ángulo agudo constante con el eje z y se hace rotar alrededor de este eje.

13.- Dada la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 -2x + 6y + 9z +20=0$, exprésela como la ecuación de una esfera.

14.- Esboce las siguientes superficies:

a) $x^2 + y^2 =16z$ b) $9x^2 + y^2 + 9z^2=0$

15.- Identifique y esboce cada superficie cuádrica después de completar cuadrados y trasladar los ejes.

a) $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y - 3z + 9 = 0$ b) $9x^2 + 16y^2 - 25z^2 - 18x + 72z = 200$

c) $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 4y + 2 = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

FACULTAD DE AGRONOMIA Y AGROINDUSTRIAS

ÁLGEBRA - MATEMÁTICA I

Ingeniería en Alimentos, Plan 1998 adaptado al CCA

Licenciatura y Profesorado en Química

TRABAJOS PRACTICOS

y

EJERCICIOS RESUELTOS

Equipo Cátedra

Lic. Josefa Sanguedolce

Lic. Maria Luisa Avila

Dr. Lucrecia Lucía Chaillou

Sr. Hernán Chiffarelli

2008

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 1

El Sistema de los Números Complejos

1) Dados los siguientes complejos: $z_1 = (3,4)$; $z_2 = (1,-2)$ y $z_3 = 1 + i^{37}$

a) Represéntelos en el plano de Gauss

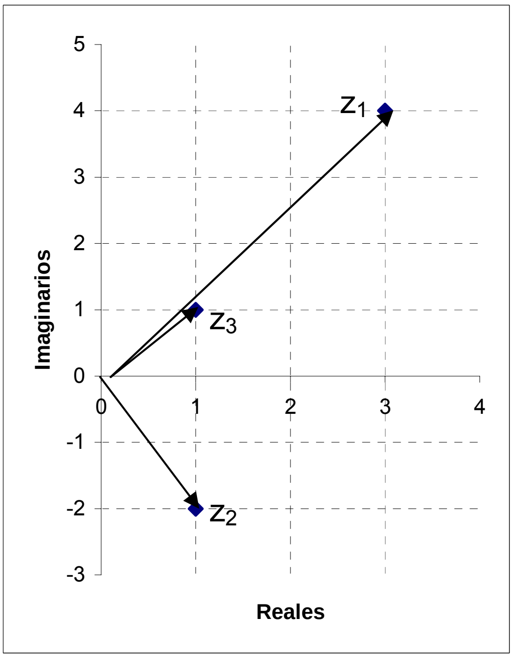
b) Determine el opuesto, el conjugado y el opuesto multiplicativo de cada uno

c) Resuelva las siguientes operaciones en forma binómico:

c1) $\dfrac{(z_3)^2 + z_1.\overline{z_2}}{z_2}$; c2) $\dfrac{(-z_1)(z_2) + i\overline{z_3}}{z_3 + \overline{z_1}}$; c3) $\dfrac{(z_1 + z_2)^2.z_3}{\overline{z_3}}$

Respuesta

a) Representación gráfica



b) El **opuesto** de un número complejo z= (a,b) se define como z_{op}= (-a,-b), por lo tanto los resultados son:

z_{1op}= (-3,-4); z_{2op}= (-1,2); z_{3op}= (-1,1)=-1-i

El **conjugado** de z= (a,b) se define como $\overline{z}$=(a-bi)= (a,-b), entonces los resultados son:

$\overline{z_1}$=(3,-4); $\overline{z_2}$=(3,-4); $\overline{z_3}$=(1,-1)

El **Inverso multiplicativo** de z=(a,b) es $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$\mathbf{z_1^{-1}} = \left(\frac{3}{3^2+4^2}; \frac{-4}{3^2+4^2}\right) = \left(\frac{3}{25}; \frac{-4}{25}\right)$$

$z_2^{-1} = \left(\frac{1}{1^2+(-2)^2};\frac{2}{1^2+(-2)^2}\right) = \left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$ $\qquad$ $\mathbf{z_3^{-1} =} \left(\frac{1}{1^2+1^2};\frac{-1}{1^2+1^2}\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

c1) $\frac{(z_3)^2 + z_1 \times \overline{z_2}}{z_2}$

$$\frac{(1+i)^2+(3+4i)(1+2i)}{1-2i} = \frac{(3-8)+(6-+4)i+(1-1)+(1+1)i}{1-2i} = \frac{-5+12i}{1-2i}\frac{(1-2i)}{(1-2i)} =$$

$$= \frac{(-5-24)+(-10+12i)}{1^2+2^2} = \frac{-29+2i}{5}$$

c2)

$$\frac{(-z_1)(z_2)+i\overline{z_3}}{z_3+\overline{z_1}} = \frac{(-3-4i)(1-2i)+i(1-i)}{(3-4i)+(1+i)} = \frac{(-3-8)+(6-4)i+(1+i)}{4-3i} = \frac{(-10+3i)}{(4-3i)}\frac{(4+3i)}{(4+3i)} =$$

$$= \frac{-49-18i}{25}$$

c3)

$$\frac{(z_1+z_2)^2 \times z_3}{\overline{z_3}} = \frac{[(3+4i)+(1-2i)]^2(1+i)}{1-i} = \frac{(4+2i)^2(1+i)}{1-i} = \frac{(16+16i+4i^2)(1+i)}{(1-i)} =$$

$$= \frac{(16-4+16i)(1+i)}{(1-i)} = \frac{(12+16i)(1+i)}{(1-i)} = \frac{(12-16)+(12+16)i}{1-i} = \frac{(-4+28i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)} =$$

$$= \frac{-32+24i}{2} = -16+12i$$

2) Dados los complejos:
a) encuentre la forma binómico o polar según corresponda
b) resuelva las operaciones en forma polar:

b1) $z_1 . z_2$; b2) z_2/ z_3; b3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; b4) z_4^4; b5) $\sqrt{z_3}$; b6) $z_2^2/\sqrt{z_4}$

z_1=-1-i; $z_2=1+\sqrt{3}\,i$; $z_3=(3/\pi)$; $z_4= \left(4/3\frac{\pi}{2}\right)$; $z_5= \left(16/\frac{\pi}{2}\right)$

Respuesta

a) Si z=(a;b)

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$; cos φ=a/ρ y sen φ=b/ρ, por lo tanto $\varphi = tg^{-1}(b/a)$

z_1=-1-i

$\rho=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; como el $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ y el $\mathrm{sen}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, el ángulo es

φ = 225º = $5\pi/4$, entonces z_1= $\left(\sqrt{2}/5\frac{\pi}{4}\right)$

z_2=1+ $\sqrt{3}$ i

$\rho=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2;\cos\varphi=\frac{1}{2}\,;sen\,\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ por lo tanto φ= $\pi/3$= 60º entonces

z_2=(2/$\frac{\pi}{3}$)

z_3=(3/π)

a= ρ cos φ =3cos π=-3 y b = ρ sen φ= 3 sen π=0 por lo tanto z_3 =(-3+0i)= (-3,0)

z_4=(4/$\frac{3\pi}{2}$)

a=4 cos 3 $\frac{\pi}{2}$ =0 y b = 4 sen 3$\frac{\pi}{2}$ = - 4, entonces z_4=(4/3$\frac{\pi}{2}$)=(0-4i)=(0,-4)

z_5=(16/$\frac{\pi}{2}$)

a=16 cos$\frac{\pi}{2}$ = 0 y b = 16 sen $\frac{\pi}{2}$ =16, entonces z_5=(0+16i)=(0,16)

b) Operaciones

b1) $z_1.z_2=(\sqrt{2}/\frac{5\pi}{4})(2/\frac{\pi}{3})=(2\sqrt{2}/\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=(2\sqrt{2}/\frac{19}{12}\pi)$

b2) $z_2/\,z_3=\left(2/\frac{\pi}{3}\right)\div(3/\pi)=(\frac{2}{3}/\frac{\pi}{3}-\pi)=(\frac{2}{3}/-2\frac{\pi}{3})$

b3) $\frac{z_1z_2}{z_3}=\frac{(\sqrt{2}/\frac{5\pi}{4})(2/\frac{\pi}{3})}{(3/\pi)}=\frac{(2\sqrt{2}/19\frac{\pi}{12})}{(3/\pi)}=(\frac{2}{3}\sqrt{2}/7\frac{\pi}{12})$

b4) $z_4{}^4=(4^4/4.3\frac{\pi}{2})=(256/6\pi)$

b5) $\sqrt{z_3}=\sqrt{(3/\pi)}=(\sqrt{3}/\frac{\pi+2k\pi}{2})$

k=0 $\sqrt{z_3}=(\sqrt{3}/\frac{\pi}{2})$ k=1 $\sqrt{z_3}=(\sqrt{3}/\frac{\pi+2\pi}{2})=(\sqrt{3}/\frac{3\pi}{2})$

b6) $z_2{}^2/\sqrt{z_4}=(2/\frac{\pi}{3})^2\div\sqrt{(4/\frac{3\pi}{2})}=(4/\frac{2\pi}{3})\div(\sqrt{4}/\frac{3\pi/2+2k\pi}{2}))$

k=0 $(4/\frac{2\pi}{3})\div(\sqrt{4}/\frac{3\pi}{4})=(2/\frac{-\pi}{12})$ k=1 $(4/\frac{2\pi}{3})\div(\sqrt{4}/\frac{7\pi}{4})=(2/\frac{-13\pi}{12})$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $z:(2/\frac{\pi}{3})=(16/\pi):(2/\pi)$; b) $z^4=(8/2\frac{\pi}{3})$; c) $z\,(4/3\frac{\pi}{2})=(\sqrt{2}/3\frac{\pi}{4})$

Respuesta:

a) $z:(2/\frac{\pi}{3})=(16/\pi):(2/\pi)$, resolviendo $z:(2/\frac{\pi}{3})=(8/-\frac{\pi}{2})$, por lo tanto $z=(8/-\frac{\pi}{2})(2/\frac{\pi}{3})=(16/-\frac{\pi}{6})$

b) $z^4=(8/2\frac{\pi}{3})$, por lo tanto $z=\sqrt[4]{(8/\frac{2\pi}{3})}=(\sqrt[4]{8}/\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4})=(\sqrt[4]{8}/\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})$

Las raíces se obtienen para k= 0,1,2,3

Para k=0, $z=(\sqrt[4]{8}/\frac{\pi}{6})$ Para k=1, $z=(\sqrt[4]{8}/\frac{2\pi}{3})$

Para k=2, $z=(\sqrt[4]{8}/\frac{7\pi}{6})$ Para k=3, $z=(\sqrt[4]{8}/\frac{5\pi}{3})$

c) $z\,(4/3\frac{\pi}{2})=(\sqrt{2}/3\frac{\pi}{4})$, despejando $z=(\sqrt{2}/3\frac{\pi}{4}):(4/3\frac{\pi}{2})=(\frac{\sqrt{2}}{4}/\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{2})=(\frac{\sqrt{2}}{4}/\frac{-3\pi}{4})$

4) Determine los puntos del plano caracterizado por los siguientes conjuntos:

a) $A=\{z\in$ ¢$/\rho\leq 2 \wedge 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\}$

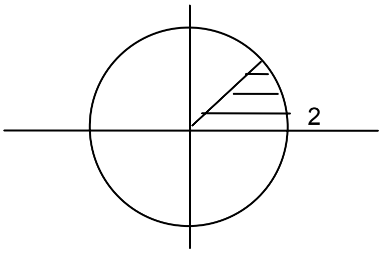
b) $B=\{z\in$ ¢$/\rho>1 \wedge \pi/3\leq\theta\leq 3\pi/2\}$

c) $C=\{z\in$ ¢$/ -2<Re(z)\leq 2 \wedge 0\leq Im(z)\leq 2\}$

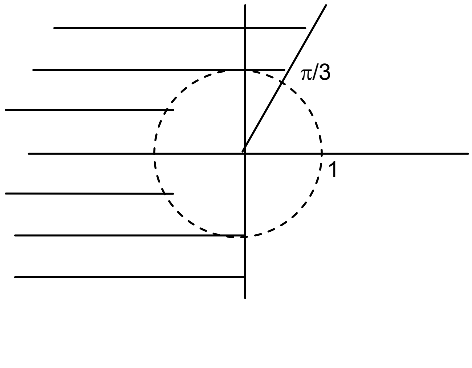
d) $D=\{z\in$ ¢$/\rho>2 \wedge -1\leq Im(z)\leq 3\}$

Respuesta:

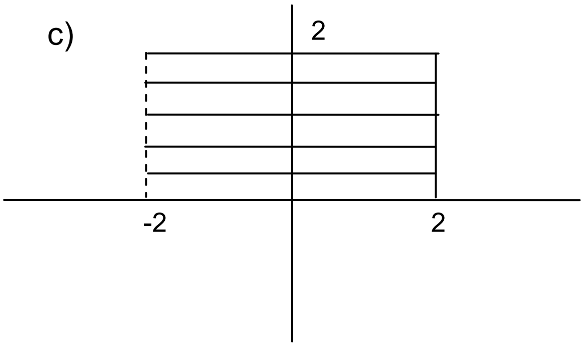
a)



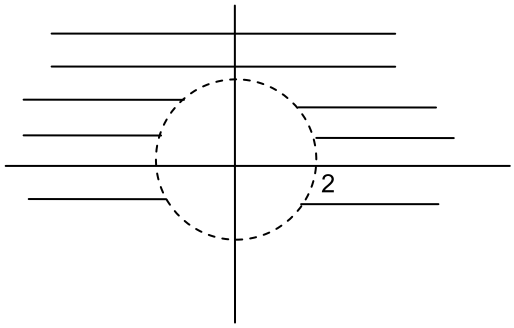
b)



c)

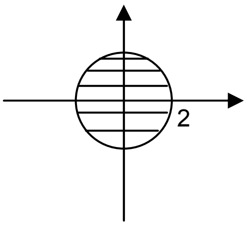


d)

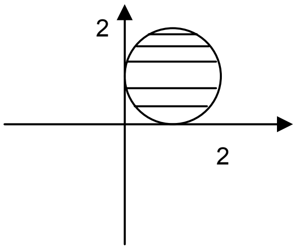


5) Dadas las siguientes regiones en el plano, determine las condiciones que cumplen los complejos que pertenecen a las mismas.

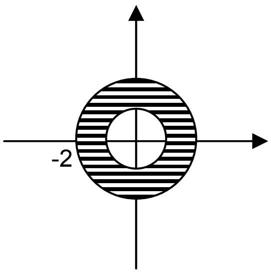
a)



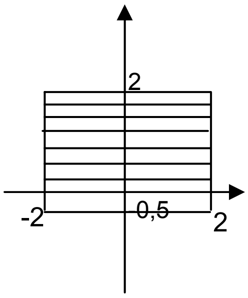
b)



c)



d)



Respuesta

a) A={z∈ ¢/ρ≤2}

b) B={z∈ ¢/$|z-1-i|\le 1$}

c) C={z∈ ¢/1≤ρ≤ 2}

d) D={z∈ ¢/-2≤ R(z) ≤ 2 ∧ -0,5 ≤ Im(z) ≤ 2}

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 2

Ceros de la Función Polinomial

1) Determine si -3, i, -i son ceros del polinomio: $P(x)=x^3+3x^2+x+3$.

Respuesta:

Si P(x) es un polinomio y r es un número (real o complejo) tal que P(r)=0, entonces r es un cero del polinomio P(x) y es una solución o raíz de la ecuación polinómica P(x)=0.

$$P(-3)= (-3)^3+3(-3)^2+(-3)+3=-27+27-3+3=0$$

$$P(-i)= (-i)^3+3(-i)^2+(-i)+3= i-3-i+3=0$$

$$P(i)= (i)^3+3(i)^2+i+3= -i-3+i+3=0$$

Por lo tanto, -3, i, -i son ceros de P(x) y por supuesto soluciones de P(x)=0.

2) Utilizando la regla de Ruffini calcule el cociente y el resto de la división de P(x) por Q(x). Siendo: $P(x)=2x^3-3x^2+3x-4$ y Q(x)=x-2.

Respuesta:

Sea $Q(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \cdots + A_{n-2} x + A_{n-1}$ el cociente y R el residuo que resulta de dividir el polinomio: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ entre el binomio (x- a), entonces el polinomio P(x) = (x – a) Q(x) + R puede expresarse como:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = A_0 x^n + (A_1 - aA_0) x^{n-1} + (A_2 - aA_1) x^{n-2} + \cdots + \\ + (A_{n-1} - aA_{n-2}) x + (R - aA_{n-1})$$

Como los polinomios de ambos miembros son iguales los coeficientes de las mismas potencias de x en ambos polinomios deben ser iguales entre sí, luego:

$a_0=A_0$
$a_1=A_1 - a\,A_0$
. . .

$$a_{n-1}=A_{n-1} - a\,A_{n-2}$$
$$a_n=R - a\,A_{n-1}$$

de donde se obtiene:

$$A_0 = a_0$$
$$A_1= a_1 + a\,A_0$$
$$. . .$$
$$A_{n-1} = a_{n-1} + a\,A_{n-2}$$
$$R = a_n + a\,A_{n-1}$$

Estos son los coeficientes del polinomio, cociente y residuo buscados, los cálculos se pueden arreglar de la siguiente forma:

	a_0	a_1	. . .	a_{n-1}	a_n
a		$a\,A_0$		$a\,A_{n-2}$	$a\,A_{n-1}$
	A_0	A_1	. . .	A_{n-1}	$\boxed{R}$

Nota: Cuando divida un polinomio P(x) entre un binomio (x-a) utilizando la división sintética, ordene P(x) en potencias decrecientes de x e inserte un 0 para todos los términos con coeficientes nulos. Si P(x) es de grado n, entonces el cociente C(x) es de grado n-1.

	2	-3	3	-4
2		4	2	10
	2	1	5	$\boxed{6}$

$C(x)= 2x^2+x+5$ y $R= 6$

3) Encuentre un polinomio P(x) tal que dividido por Q(x)=(x-1) da $C(x)=x^3+x^2-x$ como cociente y resto R= 3.

Respuesta:

<u>Algoritmo de la división</u>: Sean P(x) y Q(x) polinomios con Q(x) distinto de cero, entonces existen los polinomios C(x) y R(x) tales que P(x)=Q(x) C(X)+R(x): esto es cierto para todo número real y R(x) es un polinomio nulo o de grado menor que el de C(x).

$P(x)= (x^3+x^2-x)\ (x-1) + 3$

$P(x)= x^4 +x^3-x^2-x^3-x^2+x+3= x^4-2x^2+x+3$

4) Utilice el teorema del residuo para encontrar el valor del polinomio para P(2), siendo $P(x)=x^3-6x^2-9x+14$.

Respuesta:

Teorema del residuo: Si P(x) es un polinomio, r es un complejo y P(x) se divide entre (x-r), entonces el residuo obtenido es igual a P(r).

Se realiza el cociente entre P(x) y (x-2), aplicando la división sintética (observar que r=2).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & -9 & 14 \\ 2 & & 2 & -8 & -34 \\ \hline & 1 & -4 & -17 & \boxed{-20} \end{array}$$

Como el residuo es igual al valor del polinomio para el número dado, P(2)= **-20.**

Verificación: se reemplaza x por 2 en P(x), $P(2)= 2^3-6(2)^2-9(2)+14=$ **-20**

5) Indique si el binomio (x-5) es un factor de $P(x)=x^3-7x^2+13x-15$

Respuesta:

Teorema del factor: Sea P(x) un polinomio y r un complejo, entonces r es un cero de P(x) si y solo sí (x-r) es un factor de P(x).

Utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 13 & -15 \\ 5 & & 5 & -10 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Como P(5)=0 entonces (x-5) es un factor de P(x).

6) Determine, utilizando la Regla de los signos de Descartes, el número posible de soluciones diferentes para la ecuación polinómica: $5x^4-6x^3 +x-9=0$.

Respuesta:

Regla de los signos de Descartes: Sea P(x) un polinomio con coeficientes reales cuyo término constante es distinto de cero:

1- El número de soluciones reales positivas de la ecuación P(x)=0 es igual al número de variaciones de signos en P(x) o es menor que éste en un número par.

2- El número de soluciones reales negativas de la ecuación P(x)=0 es igual al número de variaciones de signos en P(-x) o es menor que éste en un número par.

$P(x)= 5\,x^4 - 6\,x^3 + x - 9=0$

1 2 3 3 cambios de signo $\Rightarrow$ Nº de soluciones reales positivas: **3** o bien **1**

Considerando ahora P(-x):

$P(-x)= 5\,(-x)^4 - 6\,(-x^3) - x - 9=0$

$P(-x)= 5\,x^4 + 6\,x^3 - x - 9=0$

1 1 cambio de signo $\Rightarrow$ Nº de soluciones reales negativas: **1**

Como el grado del polinomio es cuatro existen 4 soluciones a la ecuación polinómica.

En la tabla que sigue se resumen las posibles soluciones de la ecuación P(x)=0.

Nº total de soluciones	**Nº de soluciones reales positivas**	**Nº de soluciones reales negativas**	**Nº de soluciones no reales**
4	1	1	2
4	3	1	0

7) Encuentre una ecuación polinomial que tenga a -1 como raíz doble, a 5 como raíz triple y a -3 como raíz simple.

Respuesta:

Teorema de las raíces: Cada polinomio P(x) de grado n tiene exactamente n ceros (contando las multiplicidades) que son números reales o complejos.

$(x+1)^2(x-5)^3(x+3)=0$

$(x^2+2x+2)(x-5)^2(x-5)(x+3)=0$

$(x^2+2x+2)(x^3-10x^2+25x-5x^2+50x-125)\ (x+3)=0$

$(x^5-10x^4+25x^3-5x^4+50x^3-125x^2+2x^4-20x^4-20x^3+50x^2-10x^3+100x^2-250x+2x^3-20x^2+50x-10x^2+100x-250)\ (x+3)=0$

$(x^5-13x^4+47x^3-5x^2-100x-250)\ (x+3)=0$

$X^6-13x^5+47x^4-5x^3-100x^2-250x-3x^5-39x^4+141x^3-15x^2-300x-750=0$

$X^6-16x^5+8x^4+136x^3-115x^2-550x-750=0$

8) Verifique que -4 y3 constituyen la cota inferior y superior de las raíces de la ecuación polinómica $x^4+x^3-7x^2-5x+10=0$.

Respuesta:

Teorema de las cotas de las raíces: a y b pertenecientes a los reales son cota superior e inferior para las raíces reales de P(x)=0 si b ≤ toda raíz real ≤ a.

Si se realiza el cociente entre P(x) y el binomio (x-r) puede afirmarse que:

- Si r es negativo y los términos de la tercera fila de la división sintética se alternan de positivo a negativo, entonces P(x)=0 no tiene raíz alguna menor que r. (MAXIMO ENTERO NEGATIVO)
- Si r es positivo y los términos de la tercera fila de la división sintética son todos positivos o nulos, entonces P(x)=0 no tiene raíz alguna mayor que r. (MINIMO ENTERO POSITIVO)

Aplicando división sintética:

	1	1	-7	10	5
-4		-4	12	-20	60
	1	-3	5	-15	70
	+	-	+	-	+

Como se alternan los signos entonces -4 es cota inferior.

	1	1	-7	10	5
3		3	12	15	60
	1	4	5	20	70
	+	+	+	+	+

Todos los signos son positivos entonces 3 es cota superior.

9) Dado el polinomio $P(x)= 8x^3-8x^2-2x+2=0$, indique la cota inferior y superior de sus soluciones.

Respuesta:

Como se desconocen las raíces se divide entre (x+2), (x+1), (x-1), (x-2), (x-3).

	8	-8	-2	2
-2		-16	48	-92
	8	-24	46	-90
	+	-	+	-

	8	-8	-2	2
-1		-8	16	-14
	8	-16	14	-12
	+	-	+	-

-1 es la cota inferior puesto que no existe ningún número real negativo menor que -1 que sea raíz de la ecuación polinómica dada.

	8	-8	-2	2
1		8	0	-2
	8	0	-2	0
	+	+	-	-

	8	-8	-2	2
2		16	16	28
	8	8	14	30
	+	+	+	+

	8	-8	-2	2
3		24	48	138
	8	16	46	140
	+	+	+	+

Se observa que 2 es la cota superior.

10) Calcule los ceros del polinomio $x^3-3x^2-x+3=0$, siendo r=3 una raíz del mismo. Factorice el polinomio.

Respuesta:

	1	-3	-1	3
3		3	0	-3
	1	0	-1	0

Se observa que 3 es una raíz del polinomio (recordar el teorema del factor) y el cociente es $C(x)=x^2-1$, entonces el polinomio puede escribirse, en forma factorizada, como el producto,

$$P(x)=C(x)(x-r)= (x^2-1)(x-3)$$

Por inspección del primer factor deducimos que -1 y 1 son raíces de (x^2-1), aplicando nuevamente la división sintética:

	1	0	-1
-1		-1	1

	1	0	-1
1		1	1

	1	-1	0			1	1	0

$(x^2-1)=(x+1)(x-1)$

El polinomio puede escribirse en forma factorizada como $P(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$

11) Encuentre el polinomio que tenga coeficientes reales y cumpla con las siguientes condiciones: $P(1)=4$, $r=2$ raíz doble, $r=(1+i)$ raíz simple.

Respuesta:

Si $(1+i)$ es una raíz, su forma conjugada también lo es, por lo tanto:

$$(x-2)^2(x-(1+i))\,(x-(1-i))=(x^2-4x+4)(x-1-i)(x-1+i)=0$$

$$(x^2-4x+4)(x^2-x+xi-x+1-i-xi+i-i^2)=0$$

$$(x^2-4x+4)(x^2-2x+2)=0$$

$$X^4-2x^3+2x^2-4x^3+8x^2-8x+4x^2-8x+8=0$$

$$X^4-6x^3+14x^2-16x+8=0$$

12) Haga una lista y encuentre las posibles soluciones racionales de la ecuación $P(x)=3x^3+6x^2-3x-6=0$.

Respuesta:

<u>**Teorema de la raíz racional**</u>: Dado $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, con a_n distinto de cero, $\frac{p}{q}$ es un número real reducido a su mínima expresión tal que $\frac{p}{q}$ es raíz de P(x) entonces p es factor de a_0 y q es factor de a_n

P(x) tiene 1 cambio de signo, entonces solo tendrá 1 solución real positiva.

P(-x) tiene 2 cambios de signo, por lo tanto tendrá 2 o ninguna solución real negativa.

Nº total de soluciones	**Nº de soluciones reales positivas**	**Nº de soluciones reales negativas**	**Nº de soluciones no reales**
3	1	2	0
3	1	0	2

$\frac{p}{q}$ es solución racional, entonces p es factor de -6 y q es factor de 3.

Posibles divisores de p: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6

Posibles divisores de q: 1, -1, 3, -3

$\frac{p}{q}$ = 1, -1, 2, -2, 3, -3

Aplicando división sintética:

	3	6	-3	-6
1		3	9	6
	3	9	6	0

	3	6	-3	-6
-1		-3	-3	6
	3	3	-6	0

	3	6	-3	-6
2		6	24	42
	3	12	21	36

	3	6	-3	-6
-2		-6	0	6
	3	0	-3	0

Las tres raíces son: 1,-1 y -2.

13) Encuentre las raíces de las ecuaciones bicuadrada y recíproca de grado par.

a) $2x^4-x^2-1=0$, b) $6x^4+9x^3+15x^2+9x+6=0$

Respuesta:

Una ecuación es **bicuadrada** si puede escribirse como $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$, con a distinto de cero. Sus raíces son:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

a) $2x^4-x^2-1=0$, a=2, b=-1, c=-1

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm 3}{4}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1+3}{4}} = \pm 1$$

X=$\pm\sqrt{\frac{1\pm 3}{4}}$

$$\pm\sqrt{\frac{1-3}{4}}=\pm\sqrt{\frac{-2}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ i$$

O bien se puede realizar un cambio de variable, llamando u a x^2.

Se reemplaza u = x^2 en la ecuación original, que queda como: $2u^2-u-1=0$. Esta ecuación es de la forma: $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ que puede resolverse utilizando la fórmula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a.c}}{2a}$, por lo tanto,

$u=\frac{1\pm\sqrt{1-4.2.(-1)}}{2.2}=\frac{1\pm 3}{4}$, $u_1=1$ y $u_2=-1/2$.

Como $u=x^2$, se reemplazan los valores de las raíces: $u_1=1=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ y

$u_2=-1/2=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) Una ecuación recíproca de grado par se resuelve multiplicándola por $\frac{1}{x^2}$

$6x^4+9x^3+15x^2+9x+6=0$, se multiplica por $\frac{1}{x^2}$

$(6x^4+9x^3+15x^2+9x+6)\ \frac{1}{x^2}=0$

$$6x^2+9x+15+9\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9\left(x+\frac{1}{x}\right)+15=0\quad(1)$$

Llamo u=$\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow ux=x^2+1\Rightarrow x^2-ux+1=0$ (2)

$$u^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow u^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Reemplazando en (1):

$6(u^2-2)+9u+15=0$

$6u^2-12+9u+15=0$

$6u^2+9u+3=0$

$u=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-(4.3.6)}}{2.6}=\dfrac{-9\pm\sqrt{9}}{12}=\dfrac{-9\pm 3}{12}$, $u_1=-1/2$, $u_2=-1$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2):

Para u_1= $x^2+\dfrac{1}{2}x+1=0;\quad 2x^2+x+2=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-16}}{4}=-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}i$

Para u_2= $x^2+x+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 3

Matrices- Operaciones

1) Escriba explícitamente las matrices definidas por:

a) $A \in \Re^{2x3} / a_{ij} = i+j$ b) $A \in \Re^{3x3} / a_{ij} = 0$ si $i \leq j$, $a_{ij} = i+j$ si $i > j$

Respuesta:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

2) Resuelva la siguiente ecuación matricial para a, b, c y d: $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

Respuesta:

Por sustitución:

a-b =8 $\Rightarrow$ a= 8+b (1)

3d+c =7 $\Rightarrow$ d=(7-c)/3 (2)

b+c =1 $\Rightarrow$ c=1-b (3)

2a-4d = 6 (4)

Reemplazando c en la ecuación (2) por la (3), se tiene que d= (7-1+b)/3= 2+b/3 y reemplazando en (4) esta expresión para d y la correspondiente a a según (1) se obtiene:

2(8+b)-4(2+b/3)=6

16+2b-8-4b/3=6

8+2b/3=6

b=(6-8)3/2=-3

Como b=-3 reemplazando en: (3)c=4, (1)a=5 y (4)d=1

3) Dadas las siguientes matrices reconozca a que tipo corresponde cada una de ellas:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Respuesta:

a) Identidad; b) Nula; c) Diagonal; d) Triangular inferior

4) Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, calcule:

a) AB; b) B^T; c) A^T+B^T; d) B^2; e) $(A+B)^T$; f) A(BC)

Respuesta:

a) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 16\\ 3 & 14\end{bmatrix}$; b) $B^T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 7\end{bmatrix}$; d) $B^2=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -8\\ 4 & 14\end{bmatrix}$

e) A+B= $\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{bmatrix}$; $(A+B)^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 7\end{bmatrix}$

f) A(BC)

$BC=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 5 & 5\end{bmatrix}$ $A(BC)=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 5 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 21\\ 17 & 17\end{bmatrix}$

5) Compruebe las proposiciones utilizando las siguientes matrices:

$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$;$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$;$C=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

a) $AB\neq BA$; b) A+0=A; c) A(BC)=(AB)C; d) A(B+C)=AB+AC; e) AI=A; f) $A(B+C)\neq(B+C)A$

Respuesta:

a) $AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 5 & -10\end{bmatrix}$;$BA=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 2 & -9\end{bmatrix}$, como se ve $AB\neq BA$

b) $A+0=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}=A$

c) A(BC)=(AB)C

$BC=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 13\\ 4 & 2\end{bmatrix}$; $A(BC)=A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 13\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 28\\ 20 & 10\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 5 & -10\end{bmatrix}$; $(AB)C=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 5 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 28\\ 20 & 10\end{bmatrix}$

Se verifica que A(BC)=(AB)C

d) A(B+C)=AB+AC

$$B+C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix};\ A(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 9\\ -5 & -5\end{bmatrix},$$

$$\text{del ítem c) } AB=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -5 & -10\end{bmatrix} \text{ y } AC=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 9\\ -10 & 5\end{bmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -5 & -10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 9\\ -10 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 9\\ -5 & -5\end{bmatrix}, \text{ por lo tanto A(B+C)=AB+AC}$$

$$\text{e) } A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}=A$$

f) $A(B+C)\neq(B+C)A$

$$B+C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix};\ A(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 9\\ -5 & -5\end{bmatrix},$$

$$(B+C)A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 28\\ -2 & -6\end{bmatrix}$$

6) Calcule los productos AB y BA siempre que estén definidos:

$$\text{a) } A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix};\ \text{b) } A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -1 & 5 & 0\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -5\end{bmatrix};\ \text{d) } A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

Respuesta:

$$\text{a) } AB=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}_{2x3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{3x2}=\begin{bmatrix}8 & 9\\ 8 & 16\end{bmatrix}_{2x2}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{3x2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}_{2x3}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 1\\ 1 & 6 & -4\\ 16 & 0 & 20\end{bmatrix}_{3x3}$$

$$\text{b) } A_{2x3}B_{2x2} \text{ no está definido;} BA=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -1 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -10 & 4\\ 3 & -15 & 0\end{bmatrix}$$

c) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{1x3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 11 \end{bmatrix}_{1x3}$, $B_{3x3}A_{1x3}$ no está definido

d)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{1x3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3x1} = [8]_{1x1}; \; BA = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3x1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{1x3} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}_{3x3}$$

7) Encuentre la inversa de las matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Respuesta:

Aplicando el método de Gauss-Jordan:

a)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-4/3F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_2+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{9}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1]{2F_3+F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right]; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & 1/9 \\ 2/3 & 5/9 & 2/9 \\ -2/3 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

c)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-1/11F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/11 & 2/11 \end{array}\right] \xrightarrow{-5F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & -3/11 & 2/11 \end{array}\right]; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/11 & 1/11 \\ -3/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

8) En una fábrica de bebidas sin alcohol se utilizan dos tipos diferentes de colorantes en tres tipos de gaseosas. En la matriz A se indican las cantidades en kilogramos que se utilizaron durante el primer mes y en B durante el segundo mes. Considere que el elemento a_{ij} representa la cantidad de colorante i aplicado en la gaseosa j.

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 0,9 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

a) encuentre la cantidad total de colorante agregado a cada tipo de gaseosa durante los dos meses
b) ¿A qué tipo de gaseosa se le agregó mayor cantidad de colorante?
c) ¿Qué representa el elemento a_{22}?

Respuesta:

$$MES\,1, A = \begin{bmatrix} & G1 & G2 & G3 \\ C1 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ C2 & 0,4 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix}; MES\,2, B = \begin{bmatrix} & G1 & G2 & G3 \\ C1 & 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ C2 & 0,9 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$a)\ A + B = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 0,9 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,9 \\ 1,3 & 0,9 & 0,6 \end{bmatrix}$$

b) La mayor cantidad de colorante se agregó a la gaseosa G1 y el colorante agregado en mayor proporción es C2.
c) El elemento a_{22} representa al colorante C2 aplicado a la gaseosa G2 durante el primer mes de trabajo.

9) Los tiempos, en segundos, requeridos por dos máquinas envasadoras de yogur, dulce de leche y flan son los representados por la matriz E, en el que $\mathbf{e}_{ij}$ corresponde al tiempo requerido por la máquina i para envasar el producto j. $E = \begin{bmatrix} & Y & D & F \\ M1 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ M2 & 0,4 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix}$

¿Qué tiempo requerirá cada máquina para cada producto si se desean envasar 400 potes de cada uno?

Respuesta:

400 x E = $\begin{bmatrix} 160 & 200 & 320 \\ 240 & 280 & 360 \end{bmatrix}$, la máquina más eficiente es la M1 pues requiere menores tiempos para envasar la misma cantidad de cada producto.

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 4

Función Determinante- Propiedades- Aplicaciones

1) Calcule el determinante de las siguientes matrices:

A= $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; C= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;D= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta:

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 9 \cdot 2 = 0$; $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

Para resolver C y D se utiliza el método de los cofactores:

$$|C| = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2(-3-20) - 2(4-3) = 44$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{desarrollando el método desde la fila 3 para utilizar los ceros}$$

$$|D| = 0 + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-2)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$0 + (-1)\left[(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right] + 0 + 2\left[(-1)(-1))^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= -84$$

2) Resuelva la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

Respuesta:

Aplicando el método de los cofactores para resolver este determinante:

$x\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, por lo tanto: x(x+2)=3, x^2+2x=3, x^2+2x-3=0, resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 - 3$$

3) Encuentre M_{12} y M_{31} con sus correspondientes cofactores del determinante asociado a la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6; \text{el cofactor es}: c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{1+2} M_{12} = 6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \text{el cofactor es}: c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{3+1} M_{31} = -3$$

4) Utilice las propiedades de los determinantes para resolver lo siguiente:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, |A| = 44$, encuentre $|B|$ si $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -15 & 7 \end{bmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & x \end{vmatrix}$

Respuesta:

a) Como los elementos de la fila 1 de B son 3 veces los elementos de la fila 1 de A, $|B| = 3|A| = 3 .\ 44 = 132$

b) Como los elementos de la columna 2 son (-5) veces los elementos de la columna 1 el determinante es 0

c) Si se multiplica la columna 1 por (-4) y se suma a la columna 2 se obtiene x = 17

5) Calcular si es posible la inversa de las matrices dadas empleando la matriz adjunta:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

Respuesta:
a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \ |A| = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

La matriz inversa se calcula como: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A$ y la matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores A*. Los cofactores se calculan con: $c_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Los cofactores son:

$$A(1/1) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A(1/2) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A(1/3) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A(2/1) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ A(2/2) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 4; \ A(2/3) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A(3/1) = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; A(3/2) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A(3/3) = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

La matriz de cofactores es: $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y la transpuesta es:

$\text{AdjA} = (A^*)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ por lo tanto: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -7/4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}; \ |B| = -18$

$B(1/1) = (-1)^{1+1}|12| = 12; B(1/2) = (-1)^{1+2}|9| = -9;$

$B(2/1) = (-1)^{2+1}|6| = -6; B(2/2) = (-1)^{2+2}|3| = 3$

$$B^* = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}; \text{ AdjB} = (B^*)^T = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}; B^{-1} = \frac{-1}{18}\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{bmatrix}$$

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 5

Sistemas de Ecuaciones

1) Indique la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones y exprese el conjunto solución.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ -4x + 2y = -1 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} 4x - 3y + 2 = 0 \\ -8x + 6y - 4 = 0 \end{cases} ; \text{ c) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 5y + 3z = 4 \end{cases} ;$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 8 \end{cases} ; \text{ e) } \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

Respuesta:

Se puede expresar un sistema de ecuaciones en forma matricial: AX=B, donde A es la matriz de coeficientes, X la de incógnitas y B la de términos independientes. Para determinar la compatibilidad de los sistemas se debe recordar que si:

- r(A)<r(A,b) el sistema es incompatible (siendo(A,b)=A',la matriz ampliada con los términos independientes)
- r(A)=r(A,b) el sistema es compatible y si r(A)=n el sistema es determinado y si r(A)<n es indeterminado (siendo n el nº de ecuaciones).

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{1/2F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{4F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

como r(A)<r(A') el sistema es incompatible, por lo tanto no tiene solución.

$$\text{b) } \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & -2 \\ -8 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{1/4F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & -1/2 \\ -8 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{8F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

como r(A)=r(A')el sistema es compatible y como r(A)<n=2 el sistema es indeterminado.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-1F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-1/4F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & -8 & 6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-8F_2+F_3]{-1F_2+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como r(A)=r(A')el sistema es compatible y como r(A)<n=3 el sistema es indeterminado.

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-1/8F_3]{-1/4F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/4 & 2 \\ 0 & -1/8 & 1 & -1/4 \end{array}\right] \xrightarrow[1/8F_2+F_3]{-1F_2+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 2 \\ 0 & 0 & 37/321 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{37/32F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-5/4F_3+F_2]{-3/4F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Como r(A)=r(A')el sistema es compatible y como r(A)=n=3 el sistema es determinado, la solución es: x =1, y =2 y z =0.

e)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{1/2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-1F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 7/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

r(A)<r(A'), (2 < 3)el sistema es incompatible, por lo tanto no tiene solución.

2) Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z + 8 = 0 \\ x + 2y - 3z - 9 = 0 \\ 3x - y - 4z - 3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x/3 + y/2 - z - 7 = 0 \\ x/4 - 3/2y + z/2 + 6 = 0 \\ x/6 - y/4 - z/3 - 1 = 0 \end{cases}$

Respuesta

Se utilizan determinantes para encontrar la compatibilidad del sistema.

Pueden presentarse dos casos:

Si el determinante del sistema (de A) es distinto de cero el sistema es compatible y si:

- $|A_x| \neq 0 \wedge |A_y| \neq 0$,..., el sistema tiene una solución distinta a la trivial

➡ $|A_x| = 0 \wedge |A_y| = 0$,..., el sistema admite solamente la solución trivial.

Si el determinante es igual a cero y si:

➡ $|A_x| \neq 0 \vee |A_y| \neq 0$,..., el sistema es incompatible

➡ $|A_x| = 0 \wedge |A_y| = 0$,..., el sistema es indeterminado (infinitas soluciones).

Dónde: $|A_x|$ es el determinante del sistema en el que los coeficientes de la variable x se han reemplazado por los términos independientes; $|A_y|$ es el determinante del sistema en el que los coeficientes de la variable y se han reemplazado por los términos independientes, etc.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-8-3)+(-4+9)+2(-1-6) = -31 \neq 0,$$ el

sistema es compatible

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 9 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8(-8-3)+(-36+9)+2(-9-6) = 31$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(-36+9)+8(-4+9)+2(3-27) = -62$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(6+9)+(3-27)-8(-1-6) = 62$$

Como estos determinantes son distintos de cero, el sistema admite una solución distinta a la trivial, que es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{31}{-31} = -1;\ y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-62}{-31} = 2;\ z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{62}{-31} = -2$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & -3/2 & 1/2 \\ 1/6 & -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/6 & -1/3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1/4 & -3/2 \\ 1/6 & -1/4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right) - 1\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{48} \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 1/2 & -1 \\ -6 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 1/2 \\ 1 & -1/3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -6 & -3/2 \\ 1 & -1/4 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) - \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - (\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{5}{8}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 1/2 & -1 \\ -6 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 1/2 \\ 1 & -1/3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -6 & -3/2 \\ 1 & -1/4 \end{vmatrix} =$$

$$7(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) - \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - (\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{5}{8}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/2 & 7 \\ 1/4 & -3/2 & -6 \\ 1/6 & -1/4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -3/2 & -6 \\ -1/4 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1/4 & -6 \\ 1/6 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1/4 & -3/2 \\ 1/6 & -1/4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + 1) + 7(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4}) = -\frac{5}{16}$$

Como estos determinantes son distintos de cero, el sistema admite una solución distinta a la trivial, que es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{5/8}{5/48} = 6;\ y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{5/12}{5/48} = 4;\ z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-5/16}{5/48} = -3$$

3) Determine para que valores de u el sistema tiene solución distinta a la trivial

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -9/4x + y + (u+2) = 0 \\ -(u+2)x + y + z = 0 \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -9/4 & 1 & u+2 \\ -(u+2) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$1\begin{vmatrix} 1 & u+2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & u+2 \\ u+2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -9/4 & 1 \\ -(u+2) & 1 \end{vmatrix} = 1 - u - 2 - 1 + (u+2)^2 - 9/4 + u + 2 = u^2 + 4u + 4 - 9/4 =$$

$$= u^2 + 4u + 7/4; u = \frac{-4 \pm \sqrt{16-7}}{2}, u = -1/2 \wedge u = -7/2$$

4) Determine el valor de v para que el sistema sea: a) compatible determinado y b) compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x+y+vz=1 \\ x+2y-z=1+v \\ vx+y-z=v \end{cases}$$

Respuesta:

Para que el sistema sea compatible se debe cumplir que r(A)=r(A,b) y si r(A)=n el sistema es determinado. Para ello se determina el rango de la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & v & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1+v \\ v & 1 & -1 & v \end{array}\right] \xrightarrow[-vF_1+F_3]{-1F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & v & 1 \\ 0 & 1 & -1-v & v \\ 0 & 1-v & -v^2-1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1+v)F_2+F_3]{F_1-F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+2v & 1-v \\ 0 & 1 & -1-v & v \\ 0 & -v1 & -v^2-1 & -v+v^2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2v^2}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+2v & 1-v \\ 0 & 1 & -1-v & v \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{v-v^2}{2v^2} \end{array}\right] \xrightarrow[-(1+2v)F_3+F_1]{(1+v)F_3+F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3v \\ 0 & 1 & 0 & v/2+\dfrac{1}{2v}+v \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{v-v^2}{2v^2} \end{array}\right]; x=-3v,\ y=\frac{3v^2+1}{2v},\ z=\frac{v-v^2}{2v^2}$$

El sistema es compatible determinado puesto que el rango de la matriz de coeficientes (A) es igual al rango de la matriz ampliada y además el rango de A es igual al número de incógnitas.

Para que el sistema sea compatible indeterminado $|A|=0$, $|A_x|=0 \wedge |A_y|=0 \wedge |A_z|=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & v \\ 1 & 2 & -1 \\ v & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ v & -1 \end{vmatrix} + v\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ v & 1 \end{vmatrix} = -2+1-1(-1-v)+v(1-2v) = -1+1+v+v-2v^2 =$$

$$= 2v-2v^2=0, \quad v(2-2v)=0, -2v=-2 \Rightarrow v=1; \ o \ \ bien \ \ v=0$$

5) En la elaboración de un helado de cereza se utiliza una mezcla base que contiene entre sus componentes 10% de cerezas confitadas y 35% de crema de leche. Encuentre la cantidad de kg de cerezas y de crema de leche que se deben agregar a 100 kg de la mezcla base para obtener una nueva que contenga un 20% de cerezas y 40% de crema.

Respuesta:

Sean x y y el peso en kg de cerezas y crema que se deben mezclar respectivamente.

En 100kg de mezcla se tienen 10 kg de cerezas y 35 kg de crema, en la nueva mezcla se requiere:

Fracción de cerezas= $\dfrac{\text{kg cerezas}}{\text{kg mezcla}}$ o sea $0{,}20 = \dfrac{10 + x}{100 + x + y} \quad (1)$

Fracción de crema= $\dfrac{\text{kg crema}}{\text{kg mezcla}}$ o sea $0{,}40 = \dfrac{35 + y}{100 + x + y} \quad (2)$

Reordenando la ecuación (1):

20+0,2x+0,2y =10+x
0,2x-x+0,2y=-10
-0,8x-0,2y=10

Reordenando la (2):

40+0,4 x+0,4y=35+y
0,4x+(0,4-1)y=35-40
0,4x-0,6y=-5

Se debe resolver el sistema: $\begin{cases} 0{,}8x - 0{,}2y = 10 \\ 0{,}4x - 0{,}6y = -5 \end{cases}$

Por Cramer el determinante del sistema es: $\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}6 \end{vmatrix} = -0{,}48 + 0{,}08 = -0{,}4$, el valor de x es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0{,}2 \\ -5 & -0{,}6 \end{vmatrix}}{-0{,}4} = \frac{-7}{-0{,}4} = 17{,}5 \text{ kg de cerezas}$$, el valor de y es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}8 & 10 \\ 0{,}4 & -5 \end{vmatrix}}{-0{,}4} = \frac{-8}{-0{,}4} = 20 \text{ kg de crema}$$

A la mezcla base se deben agregar entonces 17,5 kg de cerezas y 20 kg de crema.

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 6

Espacios Vectoriales

1) Determine si el siguiente conjunto es un espacio vectorial:

A= $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in R^{2x2} / x, y \in R \right\}$ con la adición matricial y la multiplicación por un escalar ordinarias.

Respuesta:

Para que un conjunto V sea un espacio vectorial, considerando un cuerpo K ,+ y . dos funciones llamadas suma y producto, se deben verificar los siguientes axiomas:

1) La suma es una ley de composición interna
2) La suma es asociativa en V
3) Existencia de elemento neutro para la suma en V
4) Existencia de opuesto o inverso aditivo en V
5) La suma es conmutativa
6) El producto es una ley de composición externa en V con escalares u operadores en K
7) El producto satisface la asociatividad mixta
8) El producto es distributivo respecto de la suma en K
9) El producto es distributivo respecto de la suma en V
10) La unidad del cuerpo es el elemento neutro para el producto

Considerando el conjunto A:

1) La suma es ley de composición interna en A:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_1 & 0 \\ 0 & y + y_1 \end{bmatrix} \in A$$

Como la suma de dos elementos de A también pertenece a A, la suma es ley de composición interna en A

2) La suma es asociativa en A:

$$\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

Se desarrolla el primer miembro:

$$\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+x_1 & 0 \\ 0 & y+y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+x_1+x_2 & 0 \\ 0 & y+y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

Se desarrolla el segundo miembro:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1+x_2 & 0 \\ 0 & y_1+y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+x_1+x_2 & 0 \\ 0 & y+y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

Como ambos miembros son iguales, se verifica la asociatividad

3) Existe un neutro para la suma en A:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+e_1 & 0 \\ 0 & y+e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix};\begin{cases} x+e_1=x \Rightarrow e_1=x-x=0 \\ y+e_2=y \Rightarrow e_2=y-y=0 \end{cases}$$

Por lo tanto el neutro es $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se verifica la existencia de neutro.

4) Existe un inverso aditivo u opuesto para cada elemento de A:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+x_1 & 0 \\ 0 & y+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{cases} x+x_1=0 \Rightarrow x_1=-x \\ y+y_1=0 \Rightarrow y_1=-y \end{cases}$$

Por lo tanto el opuesto es $\begin{bmatrix} -x & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}$, se verifica la existencia de opuesto.

5) La suma es conmutativa en A:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

Se desarrolla el primer miembro:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_1 & 0 \\ 0 & y + y_1 \end{bmatrix}$$

Se desarrolla el segundo miembro:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x & 0 \\ 0 & y_1 + y \end{bmatrix}$$

Como ambos miembros son iguales se verifica la conmutatividad.

6) El producto es ley de composición externa en A con escalares K:

$$\alpha \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & 0 \\ 0 & \alpha y \end{bmatrix} \in A$$

Como el producto de un elemento de A por un escalar es otro elemento de A, el producto es ley de composición externa en A

7) El producto es asociativo en A:

$$\alpha\left(\beta\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) = \alpha\beta\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right)$$

Desarrollando el primer miembro:

$$\alpha\begin{bmatrix} \beta x & 0 \\ 0 & \beta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x & 0 \\ 0 & \alpha\beta y \end{bmatrix}$$

Desarrollando el segundo miembro:

$$\alpha\beta\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x & 0 \\ 0 & \alpha\beta y \end{bmatrix}$$

Como ambos miembros son iguales, se verifica la asociatividad.

8) El producto es distributivo respecto a la suma en K:

$$(\alpha + \beta)\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

Desarrollando el primer miembro:

$$(\alpha + \beta)\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)x & 0 \\ 0 & (\alpha + \beta)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta x & 0 \\ 0 & \alpha y + \beta y \end{bmatrix}$$

Desarrollando el segundo miembro:

$$\alpha\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & 0 \\ 0 & \alpha y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x & 0 \\ 0 & \beta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta x & 0 \\ 0 & \alpha y + \beta y \end{bmatrix}$$

Como ambos miembros son iguales, se verifica el axioma

9) El producto es distributivo respecto a la suma en A:

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el primer miembro:

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix} x + x_1 & 0 \\ 0 & y + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha x_1 & 0 \\ 0 & \alpha y + \alpha y_1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el segundo miembro:

$$\alpha\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & 0 \\ 0 & \alpha y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha x_1 & 0 \\ 0 & \alpha y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha x_1 & 0 \\ 0 & \alpha y + \alpha y_1 \end{bmatrix}$$

Como ambos miembros son iguales se verifica el axioma

10) Existe el neutro para el producto de un escalar por un elemento de A:

$$1\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

Este neutro es 1. Como se verifican los diez axiomas, se puede asegurar que A es un espacio vectorial.

2) Indique si los siguientes conjuntos son un subespacio del espacio vectorial indicado:

a) $V = \Re^2_{R,}$ $S = \{(a,b) \in \Re / b = 2\}$; b) $V = \Re^2_{R,}$ $S = \{(x,y) \in \Re^2 / y = x^2\}$

c) $V = \Re^{2x2}_{R,}$ $S = \{A \in \Re^{2x2} / r(A) = 1\}$

Respuesta:

Para que S sea un subespacio de V se requieren cuatro condiciones:

1) $S \neq \emptyset$
2) $S \subset V$
3) $x \in S \wedge y \in S \Rightarrow x+y \in S$
4) $x \in S \wedge \alpha \in \Re \Rightarrow \alpha x \in \Re$

a) 1) $S \neq \emptyset$ pues $(0,2) \in S$

2) $S \subset V$ por definición en $\Re^2$

3) $(a,2) \in S \wedge (c,2) \in S$; $(a,2)+(c,2)=(a+c,4) \notin S$

4) $k(a,2)=(ka,k2) \notin S$ si $k \neq 1$

por lo tanto S no es un subespacio de V

b) 1) $S \neq \emptyset$ pues $(0,0) \in S$, $(0,1) \in S$

2) $S \subset V$ por definición en $\Re^2$

3) $(a,a^2) \in S \wedge (b,b^2) \in S$; $(a,a_2)+(b,b^2)=(a+b,a^2+b^2) \notin S$

4) $k(a,a^2)=(ka,ka^2) \notin S$

por lo tanto S no es un subespacio de V

c) 1) $S \neq \emptyset$ pues $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$

2) $S \subset V$ por definición

3) Las matrices deben poseer rango igual a 1:

$A = \begin{bmatrix} a & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \in S \wedge B \in S, C = A + B = \begin{bmatrix} a+b & e+c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$, puesto que el rango es 1

4) $k\begin{bmatrix} a & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & ke \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$, el rango es 1

Como se verifican las 4 condiciones S es un subespacio de V

3) Encuentre las combinaciones lineales que resultan de considerar el conjunto de vectores

$S=\{u,v\}$donde $u=(1,1,2)$ y $v=(-1,2,4)$ y los números reales: i) $a=3$; $b=-1$ y ii) $a=-2$; $b=4$

Respuesta:

i) $3(1,1,2)+(-1)(-1,2,4)=(3,3,6)+(1,-2,-4)=(4,1,2)$ ó bien

$-1(1,1,2)+3(-1,2,4)=(-1,-1,-2)+(-3,6,12)=(-4,5,10)$

ii) $(-2)(1,1,2)+4(-1,2,4)=(-2,-2,-4)+(-4,8,16)=(-6,6,12)$

$4(1,1,2)+(-2)(-1,2,4)=(4,4,8)+(2,-4,-8)=(6,0,0)$

4) Exprese el vector V como una combinación lineal de V_1 y V_2, cuando sea posible. Grafique este vector solamente para el ítem a)

a) V=(4,2); V_1=(2,0) y V_2=(1,1); b) V=(-2,6); V_1=(4,8) y V_2=(4,-12);

c) $V = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}; V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

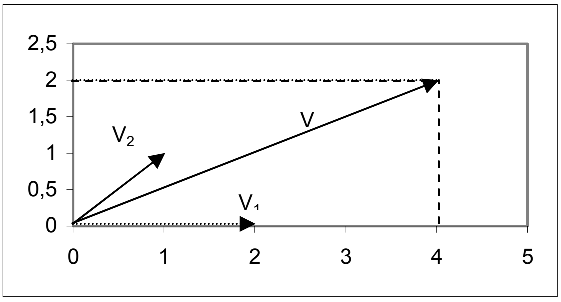
Respuesta:

a) $\alpha\ V_1+\beta\ V_2=V$

α (2,0)+β(1,1)=(4,2)

(2α,0)+(β,β)=(4,2)

(2α+β,β)=(4,2), por lo tanto: 2α+β=4 y β=2, 2α=2 $\Rightarrow$ α=1



b)

α (4,8)+β(4,-12)=(-2,6)

(4α,8α)+(4β,-12β)=(-2,6)

El sistema que se debe resolver es: $\begin{cases} 4\alpha + 4\beta = -2 \\ 8\alpha - 12\beta = 6 \end{cases}$

Utilizando el método de la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & -2 \\ 8 & -12 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[-8F_1+F_2]{F_1/4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -20 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2/20} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

α=0 y β=-1/2 puede decirse que V no es combinación lineal de V_1 y V_2

c)

$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, el sistema es $\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha + \beta = 6 \\ \alpha + 3\beta = 9 \end{cases}$, aplicando matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[-1F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[-F_2+F_3]{\substack{-1F_2 \\ -1F_2+F_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$
, como se observa: r(A)=2, r(A')=3, r(A)≠r(A'), el sistema es incompatible, no tiene solución por lo tanto V no puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos.

5) Considere los vectores: u=(3,-9,-6) y v=(6,-3,3) de $\Re^3$
   a) Escriba el vector (3,21,15) como combinación lineal de u y v.
   b) Determine el valor de m para que (3,m,15) sea una combinación lineal de u y v.

Respuesta:

a) α (3,-9,-6) +β(6,-3,3)=(3,21,15)

(3α,-9α,-6α) + (6β,-3β,3β)=(3,21,15), el sistema es: $\begin{cases} 3\alpha + 6\beta = 3 \\ -9\alpha - 3\beta = 21 \\ -6\alpha + 3\beta = 15 \end{cases}$, resolviendo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ -9 & -3 & 21 \\ -6 & 3 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[6F_1+F_3]{\substack{1/3F_1 \\ 9F_1+F_2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 15 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[-15F_2+F_3]{\substack{1/15F_2 \\ -2F_2+F_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$
, r(A')=3, r(A)≠r(A'), el sistema es incompatible, no tiene solución por lo tanto (3,21,15) no puede expresarse como una combinación lineal de u y v.

b) (3α,-9α,-6α) + (6β,-3β,3β)=(3,m,15), el sistema es: $\begin{cases} 3\alpha + 6\beta = 3 \\ -9\alpha - 3\beta = m \\ -6\alpha + 3\beta = 15 \end{cases}$, resolviendo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ -9 & -3 & m \\ -6 & 3 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[6F_1+F_3]{\substack{1/3F_1 \\ 9F_1+F_2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 9+m \\ 0 & 15 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[-15F_2+F_3]{\substack{1/15F_2 \\ -2F_2+F_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & -26+m \\ 0 & 0 & 7/3 \end{array}\right]$$
, r(A')=2, r(A)=r(A'), el sistema es compatible si m=26, por lo tanto (3,26,15) puede expresarse como una combinación lineal de u y v, con α-11/3 y β=7/3.

6) Determine si los siguientes vectores son paralelos:

   a) u=(1,2,3); v=(1,1,2);b) u=(4,2); v=(8,4); c) $u = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$;$v = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Respuesta:

Para que los vectores sean paralelos: $u \parallel v \Leftrightarrow \exists\ c \neq 0 / u = cv$

a)(1,2,3)=c(1,1,2)=(c,c,2c), entonces c =1, c=2, c =3/2 como no existe un único c los vectores u y v no son paralelos.

b) (4,2)=(8c,4c),

$\begin{cases} 4 = 8c \Rightarrow c = 2 \\ 2 = 4c \Rightarrow c = 2 \end{cases}$, como c toma el mismo valor, los vectores son paralelos.

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c & 0 \\ c & 4c \end{bmatrix}$, el sistema es $\begin{cases} -2 = 3c \Rightarrow c = -2/3 \\ 0 = 0 \\ 4 = c \\ -1 = 4c \Rightarrow c = -1/4 \end{cases}$, como no existe un único c los vectores no son paralelos.

7) Determine el subespacio generado por A:

a) En $\Re^2$:

i) A=$\{$(3,6)$\}$; ii) A=$\{$(2,2);(4,0)$\}$; iii) A=$\{$(1,0);(-2,1),(-1,0)$\}$

b) En $\Re^3$:

i) A=$\{$(2,4,8)$\}$; ii) A=$\{$(1,0,1),(0,2,-2)$\}$

c) En $\Re^{2x2}$:

i) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$; ii) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Respuesta:

Para que sea un subespacio el generado por A se debe encontrar una combinación lineal de los vectores de A.

a) En $\Re^2$

i) A=$\{$(3,6)$\}$; α(3,6)=(x,y)

(3α,6α)=(x,y), el sistema es: $\begin{cases} 3\alpha = x & (1) \\ 6\alpha = y & (2) \end{cases}$, de (1) α=x/3 y reemplazando α en (2) 6x/3=y

$\Rightarrow$ X=(1/2)y por lo tanto el subespacio generado por A es: $\overline{A} = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, x = \frac{1}{2} y \right\}$

ii) A=$\{$(2,2);(4,0)$\}$

α(2,2)+β(4,0)=(x,y)

($2\alpha+4\beta$,2α)=(x,y), el sistema es: $\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = x & (1) \\ 2\alpha = y & (2) \end{cases}$, reemplazando en (1) el valor de y

según (2), se tiene y+4β=x $\Rightarrow$ β=(x-y)/4, por lo tanto el subespacio generado por A es: $\overline{A} = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, x,y \in \Re \right\}$

iii) A=$\{$(1,0);(-2,1),(-1,0)$\}$

α(1,0)+β(-2,1)+γ(-1,0)=(x,y)

(α-2β-γ,β)=(x,y), el sistema es: $\begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = x & (1) \\ \beta = y & (2) \end{cases}$,por lo tanto el subespacio generado por A es: $\overline{A} = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, x,y \in \Re \wedge y = \beta \wedge x = \alpha - 2y - \gamma \right\}$

b) En $\Re^3$:

i) A=$\{$(2,4,8)$\}$

α(2,4,8)=(x,y,z), el sistema es $\begin{cases} 2\alpha = x & (1) \\ 4\alpha = y & (2) \\ 8\alpha = z & (3) \end{cases}$, de (1) α=x/2, reemplazando en (2) y (3)se tiene que: 2x = y y 4x = z, el subespacio generado es:

$\overline{A} = \left\{ (x,y) \in \Re^3 \,/\, y = 2x \wedge z = 4x \right\}$

ii) A=$\{$(1,0,1);(0,2,-2)$\}$

α(1,0,1)+β(0,2,-2)=(x,y,z),

(α,2β,α-2β)=(x,y,z),el sistema es: $\begin{cases} \alpha = x & (1) \\ 2\beta = y & (2) \\ \alpha - 2\beta = z & (3) \end{cases}$, reemplazando (1)en (3)se tiene x-y=z, por lo tanto el subespacio generado por A es: $\overline{A} = \left\{ (x,y) \in \Re^3 \,/\, z = x - y \right\}$

c) En $\Re^{2x2}$:

i) $A=\left\{\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

$$\alpha\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}2\alpha&\alpha\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\gamma&2\gamma\\0&\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha+2\gamma=x\\ \alpha+2\gamma=y\\ 0=z\\ \beta+\gamma=w\end{cases};\quad \left[\begin{array}{ccc|c}2&0&2&x\\1&0&2&y\\0&0&0&z\\0&1&1&w\end{array}\right]\xrightarrow{1/2F1yTranspos.deF}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x/2\\0&1&1&w\\1&0&2&y\\0&0&0&z\end{array}\right]\xrightarrow[-1F1+F3]{-1F1+F2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x/2\\0&1&0&-x/2+w\\0&0&1&-x/2+y\\0&0&0&z\end{array}\right]$$

El r(A) =r(A') si z=0, $\overline{A}=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\in\Re^{2x2}/z=0\right\}$

ii)

$A=\left\{\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix};\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$

$$\alpha\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\alpha&2\alpha\\3\alpha&4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\beta&4\beta\\6\beta&8\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma&\gamma\\\gamma&\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=x\\2\alpha+4\beta+\gamma=y\\3\alpha+6\beta+\gamma=z\\4\alpha+8\beta+\gamma=w\end{cases};\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\2&4&1&y\\3&6&1&z\\4&8&1&w\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{-2F_1+F_2\\-3F_1+F_3\\-4F_1+F_4}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\0&0&-1&-2x+y\\0&0&-2&-3x+z\\0&0&-3&-4x+w\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{F_1+F_2\\2F_1+F_3\\3F_1+F_4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\0&0&0&-x+y\\0&0&0&-x+z\\0&0&0&-x+w\end{array}\right];\begin{cases}-x+y=0\Rightarrow y=x\\-x+z=0\Rightarrow z=x\\-x+w=0\Rightarrow w=x\end{cases}$$

$$\overline{A}=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\in\Re^{2x2}/x=y=z=w\right\}$$

8) Determine el subespacio fila y columna de la matriz A:

a) $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$;b) $A=\begin{bmatrix}1&0&-4\\1&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$

Respuesta:

a) $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$; $\alpha(1{,}4)+\beta(2{,}5)+\gamma(3{,}6)=(x,y)$; el sistema es : $\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=x\\4\alpha+5\beta+6\gamma=y\end{cases}$; $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x\\4&5&6&y\end{array}\right]$

$S_{fila}=\{(x,y)\in\Re^{2x1}/\,x,y\in\Re\}$, $\dim S_{fila}=2$

Subespacio columna $\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$; $\begin{cases}\alpha+4\beta=x\\2\alpha+5\beta=y\\3\alpha+6\beta=z\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&4&x\\2&5&y\\3&6&z\end{array}\right]\xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&4&x\\0&-3&-2x+y\\0&-6&-3x+z\end{array}\right]\xrightarrow[-4F_2+F_1]{\substack{-1/3F_2\\6F_2+F_3}}\left[\begin{array}{cc|c}0&1&9x-4y\\0&1&-2/3x-y/3\\0&-6&-4x-2y-3x+z\end{array}\right]\xrightarrow{-F_1+F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}0&1&9x-4y\\0&0&-9x+4y-2/3x-y/3\\0&0&-4x-2y-3x+z\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}0&1&9x-4y\\0&0&-29/3x+11/3y\\0&0&-7x-2y+z\end{array}\right]$$

$-29/3x+11/3y=0\Rightarrow y=29/3x.3/11=29/11x$

$-7x-2y+z=0\Rightarrow -7x-2.\dfrac{29}{11}x+z=0\Rightarrow -7x-58/11x+z=0\Rightarrow z=\dfrac{135}{11}x$

$S_{columna}=\left\{(x,y,z)\in\Re^{3x1}/\,y=\dfrac{29}{11}x\wedge z=\dfrac{135}{11}x\right\}$, $\dim S_{columna}=3$

b)

$B=\begin{bmatrix}1&0&-4\\1&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$; $\alpha(1,,0,-4)+\beta(1,1,1)+\gamma(2,1,0)=(x,y,z)$; *el sistema es* : $\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=x\\\beta+\gamma=y\\-4\alpha+\beta=z\end{cases}$;

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x\\0&1&1&y\\-4&1&0&z\end{array}\right]\xrightarrow{4F_1+F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x\\0&1&1&y\\0&5&8&4x+z\end{array}\right]\xrightarrow[-5F_2+F_3]{-F_2+F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x-y\\0&1&1&y\\0&0&3&4x-5y+z\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{1/3F_3\\-F_3+F_2\\-F_3+F_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-4/3x-5/3y-z+x-y\\0&1&0&-4/3x-5/3y-z+y\\0&0&3&-4/3x-5/3y+z\end{array}\right]$$

$S_{fila} = \{(x,y,z) \in \Re^{3x1} / x,y,z \in \Re\}, \dim S_{fila} = 3$

Subespacio columna

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix};\begin{cases}\alpha-4\gamma=x\\ \alpha+\beta+\gamma=y\\ 2\alpha+\beta=z\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&x\\1&1&1&y\\2&1&0&z\end{array}\right]\xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&x\\0&1&5&-x+y\\0&1&8&-x+z\end{array}\right]\xrightarrow{-F_2+F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&x\\0&1&5&-x+y\\0&0&3&x-y+-x+z\end{array}\right]\xrightarrow{1/3F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&x\\0&1&5&-x+y\\0&0&1&z-y/3\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{1/3F_1\\-5F_3+F_2\\4F_3+F_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4z-\frac{4}{3}y+x\\0&1&5&-5z+\frac{5}{3}y-x+y\\0&0&1&z-y/3\end{array}\right]$$

$S_{columna} = \{(x,y,z) \in \Re^{3x1} / x,y,z \in \Re\}, \dim S_{columna} = 3$

9) Proponga un generador para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales del espacio que se indica:

a) $\{(x,y) \in \Re^2 / y - 1/2x = 0\}$ en $\Re^2_R$;   b) $\{(x,y,z) \in \Re^3 / x = z \wedge y = 2z\}$ en $\Re^3_R$;

c) $\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in \Re^{2x2} / -a+4b=0 \wedge d = 1/2c\right\}$

Respuesta:

a)y-1/2 x = 0$\Rightarrow$ y=1/2 x

(x,1/2 x)=x(1,1/2) $\Rightarrow$ S ={(1,1/2)}

b) (z,2z,z)=z(1,2,1) $\Rightarrow$ S ={(1,2,1)}

c) $\begin{bmatrix}a&\frac{1}{4}a\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&\frac{1}{4}a\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\c&1/2\,c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\c&1/2\end{bmatrix}\Rightarrow s=\left\{\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\c&1/2\end{bmatrix}\right\}$

10)Determine cuales de los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes:

a) $\left\{\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\right\}$ en $\Re^{2x1}$ b) $\{(1,3);(2,4);(1,6)\}$ en $\Re^2$

c) $\{(1,2,3);(1,3,2,);(0,-1,1)\}$ en $\Re^3$ d) $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2\\4&2\end{bmatrix}\right\}$ en $\Re^{2x2}$

Respuesta:

a) Para que un conjunto sea linealmente independiente se necesita que los coeficientes de la combinación lineal sean nulos.

$$\alpha\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}6\alpha\\2\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\beta\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}6&3&0\\2&5&0\end{array}\right]\xrightarrow[-2F_1+F_2]{1/6F_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&1/2&0\\0&4&0\end{array}\right]\xrightarrow[-1/2F_2+F_1]{1/4F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]$$

Como r(A)=r(A')=2 el sistema es compatible determinado y para que el conjunto sea linealmente independiente se necesita que α=0 y β=0, lo que puede verse claramente en este ejemplo.

b) $\{(1,3);(2,4);(1,6)\}$en $\Re^2$

$\alpha(1,3)+\beta(2,4)+\gamma(1,6)=(0,0)$, el sistema es: $\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\3\alpha+4\beta+6\gamma=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\3&4&6&0\end{array}\right]\xrightarrow{-3F_1+F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-2&3&0\end{array}\right]\xrightarrow{-2F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&-3/2&0\end{array}\right]\xrightarrow{-2F_2+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&0\\0&1&-3/2&0\end{array}\right],\begin{cases}\alpha+4\gamma=0\Rightarrow\alpha=-4\gamma\\\beta-3/2\gamma=0\Rightarrow\beta=3/2\gamma\end{cases}$$

Como r(A)=r(A')=2 el sistema es compatible y r(A)<3(número de incógnitas)el sistema es indeterminado linealmente dependiente.

c) $\{(1,2,3);(1,3,2);(0,-1,1)\}$en $\Re^3$

$\alpha(1,2,3)+\beta(1,3,2)+\gamma(0,-1,1)=(0,0,0)$, el sistema es: $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\2\alpha+3\beta-\gamma=0\\3\alpha+2\beta+\gamma=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\2&3&-1&0\\3&2&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_2+F_3]{-F_2+F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right];\begin{cases}\alpha+\beta=0\Rightarrow\alpha=-\beta\\\beta-\gamma=0\Rightarrow\beta=\gamma\end{cases}$$

Como r(A)=r(A')=2 el sistema es compatible y r(A)<3(número de incógnitas)el sistema es indeterminado linealmente dependiente.

d) $\alpha\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}2&2\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\alpha&0\\\alpha&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\beta&\beta\\0&\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\gamma&2\gamma\\4\gamma&2\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix};\begin{cases}\alpha+2\beta+2\gamma=0\\\beta+2\gamma=0\\\alpha+4\gamma=0\\\beta+2\gamma=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&1&2&0\\1&0&4&0\\0&1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow[-F_2+F_4]{-F_1+F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&1&2&0\\0&-2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[-2F_2+F_1]{2F_2+F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&2&0\\0&0&6&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[2F_3+F_1]{1/6F_3,\ -2F_3+F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$\alpha=0;\beta=0;\gamma=0$

Como r(A)=r(A')=3 el sistema es compatible y r(A)=3(número de incógnitas)el sistema es determinado y linealmente independiente.

11)Determine el valor de t para que los conjuntos sean linealmente dependientes:

a) v_1=(4,t) y v_2=(-t,1); b) v_1=(1,0,t) y v_2=(2,t,4)

Respuesta:

Para que el sistema sea linealmente dependiente, se requiere que r(a)=r(A') y que r(A) < n (número de incógnitas)o bien que $|A|=0$

a) $\begin{vmatrix}-4&t\\-t&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -4+t^2=0;\ t^2=4\Rightarrow t=\pm2$

b) $\alpha(1,6,t)+\beta(2,t,4)=(0,0,0);\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\6\alpha+\beta t=0\\\alpha t+4\beta=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\6&t&0\\t&4&0\end{array}\right]\xrightarrow[-6F_1+F_2]{-tF_1+F_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-12+t&0\\0&-2t+4&0\end{array}\right]\xrightarrow{(-t+2)F_1+F_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-12+t&0\\0&0&0\end{array}\right];\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\-12+t=0\end{cases};\quad t=12$$

El sistema es linealmente dependiente, r(a)=r(A')=2 y que r(A) < 3 (número de incógnitas).

12)Determine cuales de los siguientes conjuntos son bases del espacio que se indica.

a) $S=\{(1,0);(2,2);(1,4)\}$ en $\Re^2_R$; b) $S=\{(1,1,1);(1,0,1);(0,1,3)\}$ en $\Re^3_R$

$$c)S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ en } \Re^{2x2}$$

Respuesta:

Se puede probar que S es una base para $\Re^2$ si el conjunto es linealmente independiente, para ello el determinante de la matriz de coeficientes debe ser distinto de cero o bien r(A)=r(A')= número de incógnitas.

a)

$$S = \{(1,0);(2,2);(1,4)\} \text{ en } \Re^2_R$$

$$\alpha(1,0) + \beta(2,2) + \lambda(1,4) = (x,y)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & 4 & y & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2F_2+F_1]{1/2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & -3 & x-y & 0 \\ 0 & 1 & 2 & y/2 & 0 \end{array}\right]$$

r(a)=r(A')=2 y que r(A) < 3 (número de incógnitas), el sistema es linealmente dependiente y S no es una base de $\Re^2$.

b)

$$S = \{(1,1,1);(1,0,1);(0,1,3)\} \text{ en } \Re^3_R$$

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,3) = (x,y,z); \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 = x \\ \alpha + \gamma = 0 = y \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 = z \end{cases},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - 1(3-1) = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{S es una base de } \Re^3_R$$

c)

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ en } \Re^{2x2}$$

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ el sistema es: } \begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -1 \neq 0 \text{ S es base de } \Re^{2x2}$$

13)Dados los siguientes subespacios de V, determine una base para cada uno e indique su dimensión.

a) $V=\Re^3$, $S_2=\{(a,b,c)/a+2b=0\}\}$; b) $V=\Re_R^{2x2}$ $\quad S_1=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} / a+b=0 \wedge c=1\right\}$

c) $V=\Re^2$, $S_1=\{(z,u)/z+u=0\}$

Respuesta:

a) $V=\Re^3$

$S_2=\{(a,b,c)/a+2b=0\}$

(a,b,c)=(-2b,b,c), si se escribe como una combinación lineal:

(-2b,b,c)= a(0,0,0)+b(-2,1,0)+c(0,0,1)

B=$\{$(-2,1,0);(0,0,1)$\}$ Dim B=2

b)

$$V=\Re_R^{2x2} \quad S1=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} / a+b=0 \wedge c=1\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b & b \\ 1 & d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\} \text{Dim}=3$$

c) $V=\Re^2$, $S_1=\{(z,u)/z+u=0\}$

(z,u)=(-u,u)=u(-1,1)$\Rightarrow$ B=$\{$(-1,1)$\}$ Dim B=1

14) Encuentre una base y la dimensión del espacio solución de cada uno de los sistemas homogéneos que se presentan a continuación:

a) $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+x_2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+5x_3-7x_4=0 \end{cases}$

Respuesta:

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[2F_1+F_3]{F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{3F_2+F_1 \\ 5F_2+F_{31}}]{-1/5F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-1/2F_2+F_1}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], x = 0;\ y - 4/5z = 0 \Rightarrow z = -5/4y$

(x,y,z)=(0,y,-5/4y)=y(0,1,-5/4)$\Rightarrow$ B=$\{$(0,1,-5/4)$\}$ Dim =1

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -11 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-F_2+F_1]{1/4F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11/4 & 19/4 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & -11/4 & 0 \end{array}\right]$

$$x_1 - 11/4x_3 + 19/4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 11/4x_3 - 19/4x_4$$
$$x_2 + 7/4x_3 - 11/4x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -7/4x_3 + 11/4x_4$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (11/4x_3 - 19/4x_4, -7/4x_3 + 11/4x_4, x_3, x_4) =$$
$$x_3(11/4, -7/4, 1, 0) + x_4(-19/4, 11/4, 0, 1)$$
$$B = \{(11/4, -7/4, 1, 0); (-19/4, 11/4, 0, 1)\}\ \text{Dim } B = 2$$

15) Dadas las bases en $\Re^2$: $B_1=\{(2,1),(0,2)\}$ y $B_2=\{(1,0),(1,2)\}$, encuentre las coordenadas de v=(1,2) y u=(2,4) en ambas bases.

Respuesta:

Para determinar las coordenadas del vector con respecto a la base B. Para ello se escriben las componentes de la base B en columna y se amplía la matriz con el vector cuyas coordenadas se desea calcular. A continuación se la reduce por Gauss-Jordan.

Para v en B_1: (1,2)=α(2,1)+β(0,2)

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Transp } F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-1/4F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_2+F_1}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right]$

Por lo tanto las coordenadas son $[v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$.

Para v en B_2: (1,2)=α(1,0)+β(1,2)

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&2&2\end{array}\right]\xrightarrow{1/2F_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{-1F_2+F_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&1\end{array}\right]$$, las coordenadas son $[v]_{B_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Para u en B_1: (2,4)=α(2,1)+β(0,2)

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&0&2\\1&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{\text{Transp }F_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&4\\2&0&2\end{array}\right]\xrightarrow{-2F_1+F_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&-4&-6\end{array}\right]\xrightarrow{-1/4F_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&1&3/2\end{array}\right]\xrightarrow{-2F_2+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&3/2\end{array}\right]\Rightarrow[u]_{B_1}=\begin{bmatrix}1\\3/2\end{bmatrix}$$

Para u en B_2: (2,4)=α(1,0)+β(1,2)

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{1/2F_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{-1F_2+F_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&2\end{array}\right]$$, las coordenadas son: $[u]_{B_2}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

16) Determine las coordenadas del vector v con respecto a la base dada:

a) B=$\{$(1,1,0); (1,1,1); (1,0,0)$\}$ una base ordenada de $\Re^3_R$, v=(1,0,1)

b) $B=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ de $\Re^{2x2}$ y $v=\begin{bmatrix}2&2\\6&8\end{bmatrix}$

Respuesta:

a) (1,0,1)=α(1,1,0)+β(1,1,1)+γ(1,0,0)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-1F_1+F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&-1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{Transp F1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{-F_2+F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-F_3+F_1]{-1F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right],\quad \text{las coordenadas son } [v_B]=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix}2&2\\6&8\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};\qquad \begin{cases}2=\alpha\\\beta=6\\\gamma=8\end{cases}\Rightarrow[v]_B=\begin{bmatrix}2\\6\\8\end{bmatrix}$$

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 7

Transformaciones lineales

1) Determine si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales:

a) $T : \Re^2 \to \Re^3 \,/\, T(x,y) = (2x - y, x + y, y)$; b) $T : \Re^3 \to \Re^2 \,/\, T(x,y,z) = (x + 2, y - 2z)$

c) $T : \Re^2 \to \Re^{2x2} \,/\, T(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$; d) $T : \Re^{2x2} \to \Re^2 \,/\, T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a - 3d, c - b)$

Respuesta:

Dados X=(x,y) y Y=(x',y'), una aplicación es una transformación lineal si se verifican las siguientes condiciones:

1) T(X+Y)=T(X)+T(Y), o sea T[(x,y)+(x',y')]=T(x,y)+T(x',y')

2) $T(\alpha X)= \alpha T(X)$

a) $T : \Re^2 \to \Re^3 \,/\, T(x,y) = (2x - y, x + y, y)$

1)T(X+Y)=T[(x,y)+(x',y')]=T[x+x',y+y']=[2x+2x'-y-y',x+x'+y+y',y+y'] (1)

T(X)+T(Y)=T(x,y)+T(x',y')=(2x-y,x+y,y)+(2x'-y',x'+y',y')=[2x+2x'-y-y',x+x'+y+y',y+y'] (2)

Se verifica que la ecuación (1) es igual a la (2)

2) $T(\alpha X)= \alpha T(X)$

$T(\alpha X)=T(\alpha(x,y))=T(\alpha x,\alpha y)=(2\alpha x-\alpha y, \alpha x+\alpha y,\alpha y)$ (3)

$\alpha T(X)= \alpha T(x,y)= \alpha(2x-y,x+y,y)=(2\alpha x-\alpha y, \alpha x+\alpha y,\alpha y)$ (4)

Se verifica que (3) =(4). Se cumplen las 2 condiciones, $T:\Re^2 \to \Re^3$ es una transformación lineal.

b) $T : \Re^3 \to \Re^2 \,/\, T(x,y,z) = (x + 2, y - 2z)$

1)T(X+Y)=T[(x,y,z)+(x',y',z')]=T[x+x',y+y',z+z']=[x+x'+2,y+y'-2z-2z'] (1)

T(X)+T(Y)=T(x,y,z)+T(x',y',z')=(x+2,y-2z)+(x'+2,y'-2z')=[x+x'+4,y+y'-2z-2z'](2)

Como (1) no es igual a (2), $T : \Re^3 \to \Re^2 \,/\, T(x,y,z) = (x + 2, y - 2z)$ no es una transformación lineal

c) $T : \Re^2 \to \Re^{2x2} \,/\, T(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

1)T(X+Y)=T[(x,y)+(x',y')]=T[x+x',y+y']= $T\left[\begin{bmatrix}2x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2x' & 0\\ 0 & y'\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}2x+2x' & 0\\ 0 & y+y'\end{bmatrix}$(1)

T(X)+T(Y)=T(x,y)+T(x',y')= $T\begin{bmatrix}2x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}2x' & 0\\ 0 & y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+2x' & 0\\ 0 & y+y'\end{bmatrix}$ (2)

Se verifica que la ecuación (1) es igual a la (2)

2) $T(\alpha X)= \alpha T(X)$

$T(\alpha X)=T(\alpha(x,y))=T(\alpha x,\alpha y)=$ $\begin{bmatrix}2\alpha x & 0\\ 0 & \alpha y\end{bmatrix}$ (3)

$\alpha T(X)= \alpha T(x,y)= \alpha\begin{bmatrix}2x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha x & 0\\ 0 & \alpha y\end{bmatrix}$ (4)

Se verifica que (3) =(4). Se cumplen las 2 condiciones, $T:\Re^2\rightarrow\Re^{2x2}$ es una transformación lineal.

d) $T:\Re^{2x2}\rightarrow\Re^2\,/\,T\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=(a-3d,c-b)$

1)T(X+Y)=T[(x,y)+(x',y')]=T[x+x',y+y']=

$$T\begin{bmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{bmatrix}=[a+a'-3(d+d'),(c+c')(b+b')]=[a+a'-3d-3d',cb+c'b+cb'+c'b'](1)$$

$$T(X)+T(Y)=T(x,y)+T(x',y')=T\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}=(a-3d,cb)+(a'-3d',c'b')=$$

$[a+a'-3d-3d',cb+c'b']$ (2)

Como (1) no es igual a (2), no es una transformación lineal.

2) Considere las transformaciones lineales de los ítems a y c del ejercicio anterior y:

i) Encuentre el núcleo, la imagen y sus respectivas dimensiones.

ii) Verifique: Dim V=Dim Nu+Dim Img

iii) Clasifíquelas

Respuesta:

Núcleo, $N_T=\{x\in V/T(x)=0_w\}$; Imagen, $Img_T=\{y\in W/\exists\ x\in V:T(x)=y\}$

$$a)\ T:\Re^2 \to \Re^3 / T(x,y) = (2x-y, x+y, y)$$

$$T(a,b) = (0,0,0)$$

$$(2a-b, a+b, b) = (0,0,0) \quad ;\begin{cases} 2a-b, = 0 & (1) \\ a+b=0 & (2) \\ b=0 & (3) \end{cases}$$

i) Reemplazando el valor de b en (2) a=0, por lo tanto:

$N_T=\{(x,y)\in \Re^2/a=b=0\}=\{(0,0)\}$, Dim Nu= 0 pues contiene un único elemento que es su neutro.

$Img_T=\{(x,y,z)\in\Re^3/\exists(a,b)\in \Re^2:T(a,b)=(x,y,z)\}$

$$T(a,b) = (x,y,z)$$

$$(2a-b, a+b, b) = (x,y,z) \quad ;\begin{cases} 2a-b, = x & (1) \\ a+b=y & (2) \\ b=z & (3) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x+z \\ 1 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -2y+2z+x+z \\ 1 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right],$$

$$\begin{cases} a = y-z \\ b = z \end{cases}$$

El rango de la matriz es 2 por lo tanto Dim Img=2

ii) DimV=Dim Nu+Dim Img=0+2=0

iii) T es inyectiva pues Dim Nu=0

T no es sobreyectiva (Dim Img$\neq$ Dim W=3)

T no es biyectiva

$$c)\ T:\Re^2 \to \Re^{2x2} / T(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

$$N_T = \left\{(a,b)\in\Re^2 / T(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} 2a=0 \\ b=0 \end{cases} \quad , \quad a=b=0 \Rightarrow N_T = \{(0,0)\} \qquad \text{Dim Nu} = 0$$

$$\text{Im}\,g_T = \left\{\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \Re^{2x2} / \exists(a,b)\in\Re^2 : T(a,b) = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \text{Dim Im}\,g = 2$$

ii) DimV=Dim Nu+Dim Img=0+2=0

iii) T es inyectiva pues Dim Nu=0

T no es sobreyectiva (Dim Img$\neq$ Dim W=3)

T no es biyectiva

3) Sea T:$\Re^2 \rightarrow \Re^3$ una transformación lineal que verifica T(4,0)=(4,8,12) y T(0,4)=(0,-2,1)

a) Obtenga T(5,-2)

b) ¿Existe algún vector de: $\Re^2$ cuya imagen sea (0,0,0)?

Respuesta:

a) T(5,-2)=T[α(4,0)+β(0,4)]=T[(4α,0)+(0,4β)]

$$(5,-2)=(4\alpha,4\beta)\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 5/4 \\ 4\beta = -2 \Rightarrow \beta = -2/4 = -1/2 \end{cases}$$

T(5,-2)=T[5/4(4,0)+(-1/2)(0,4)]=5/4T[(4,0)+(-1/2)T(0,4)]=5/4(4,8,12)+(-1/2)(0,-2,1)=
=(5,2,3)+(0,1,-1/2)=(5,3,5/2)

T(5,-2)=(5,3,5/2)

b) Si T(x,y)=(0,0,0), existe al menos un vector (0,0) cuya imagen sea (0,0,0)

4) Muestre que la transformación lineal T:$\Re^2 \rightarrow \Re^2$ que verifica que T(2,0)=(2,2); T(0,2)=(-2,4) transforma un cuadrado de vértices A=(2,0); B=(0,2); C=(0,0); D=(2,2) en un paralelogramo. Realice la representación gráfica.

Respuesta:

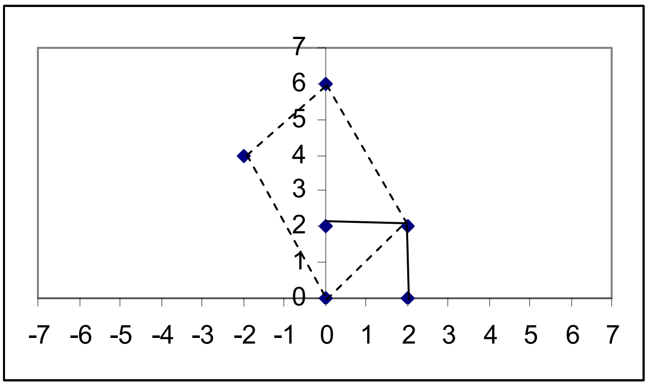
T:$\Re^2 \rightarrow \Re^2$:T(2,0)=(2,2); T(0,2)=(-2,4)

Para A': T(2,0)=T[1(2,0)+0(0,2)]= 1T(2,0)+0T(0,2)=1(2,2)+0(-2,4)=(2,2)+(0,0)=(2,2)

Para B': T(0,2)=T[0(1,0)+1(0,2)]= 0T(2,0)+1T(0,2)=0(2,2)+1(-2,4)=(0,0)+(-2,4)=(-2,4)

Para C': T(0,0)=T[0(2,0)+0(0,2)]= 0T(2,0)+0T(0,2)=0(2,2)+0(-2,4)=(0,0)

Para D': T(2,2)=T[1(2,0)+1(0,2)]= 1T(2,0)+1T(0,2)=1(2,2)+1(-2,4)=(2,2)+(-2,4)=(0,6)



5) Sea $T:\Re^3 \rightarrow \Re^2 / T(x,y,z)=(x-z,y+2z)$

a) Determine la matriz asociada a T respecto de las siguientes bases:
   $B=\{(0,2,0), (2,2,0),(2,2,2)\}$ en $\Re^3$ y $B' =\{(2,0), (0,2)\}$ en $\Re^2$

b) Determine la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas de los espacios.

c) Utilizando las matrices de los ítems anteriores calcule T(2,4,6)

Respuesta:

a) Se aplica la transformación lineal a los componentes de la primera base B y se expresan como una combinación lineal de los elementos de la segunda base B'.

$$T(0,2,0)=(0,2)=a_1(2,0)+b_1(0,2) \quad (1)$$

$$T(2,2,0)=(2,2)=a_2(2,0)+b_2(0,2) \quad (2)$$

$$T(2,2,2)=(4,0)=a_3(2,0)+b_3(0,2) \quad (3)$$

Luego se escriben los datos en forma matricial. La primera fila está constituida por los elementos del primer par ordenado de la base B' y la segunda fila por los elementos del segundo par que constituyen esta base. A continuación y en columna se ubican los pares que constituyen el resultado de la transformación lineal aplicada a la primera base B.

Es decir: $\begin{array}{cc|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$

Se procede entonces a la reducción por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{cc|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

La matriz asociada a la transformación lineal es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{2x3}$

b) $B_{canónica}=\{(1,0,0), (0,10),(0,0,1)\}$; $B'_{canónica}=\{(1,0), (0,1)\}$

$T(1,0,0)=(1,0)=a_1(1,0)+b_1(0,1)$ (1)
$T(0,1,0)=(0,1)=a_2(1,0)+b_2(0,1)$ (2)
$T(0,0,1)=(1,-1)=a_3(1,0)+b_3(0,1)$ (3)

$$\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

La matriz asociada a la transformación lineal respecto a la base canónica es: $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \Re^{2x3}$

c) Para calcular el resultado de la transformación de un vector utilizando las matrices asociadas se deben determinar las coordenadas del vector con respecto a la base B. Para ello se escriben las componentes de la base B en columna y se amplía la matriz con el vector cuyas coordenadas se desea calcular. A continuación se la reduce por Gauss-Jordan.

$$(2,4,6)=\alpha(0,2,0)+\beta(2,2,0)+\gamma(2,2,2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{1/2F_2 \text{y Transp } F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{1/2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{1/2F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Si se multiplica la matriz asociada a la transformación por las coordenadas del vector en la base B, se obtienen las coordenadas de la Imagen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{(coordenadas de la imagen)}$$

T(2,4,6)=4(2,0)+(-1)(0,2)=(8,-2) (resultado de la transformación utilizando matriz asociada a dicha transformación)

b) Matriz en base B'

T(2,4,6)=4(2,0)+(-1)(0,2)=(8,0)+(0,-2)=(8,-2) son las coordenadas respecto a la segunda base.

Utilizando la base canónica: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$, las coordenadas coinciden con las componentes del vector resultante de la transformación, puesto que la matriz asociada proviene de la base canónica.

T(2,4,6)=8(1,0)+(-2)(0,1)=(8,-2)

Como se observa el resultado de la transformación utilizando las matrices asociadas es el mismo

6) Considerando las matrices asociadas a la transformación lineal del ejercicio anterior encuentre: núcleo, imagen, dimensiones.

Respuesta:

$T:\Re^3 \to \Re^2 / T(x,y,z)=(x-z,y+2z)$; $A_T X=T(x)$; Núcleo $N_T=\{x \in V / T(x)=0_w\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$N_T=\{(x,y,z) \in \Re^3 / x=2z \wedge y=-2z\}$,el vector genérico es: (2z,-2z,z)=z(2,-2,1), Dim N_T= 1

$Img_T=\{(x,y) \in \Re^2 / T(a,b,c)=(x,y)\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & y-x \\ 0 & 1 & 2 & x \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a - 2c = y - x \\ b + 2c = x \end{cases}$$

Dim Img=2, DimV= 2+1=3

El núcleo respecto a la base canónica es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]; \quad \begin{cases} x + z = 0 \Rightarrow x = -z \\ y - z = 0 \Rightarrow y = z \end{cases}$$

$N_T=\{(x,y,z) \in \Re^3 / x=-z \wedge y=z \wedge z \in \Re\}$,el vector genérico es:

(-z,z,z)=z(-1,1,1) Dim N_T= 1

Para la imagen:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, el r(A)=Dim Img=2 por lo tanto la Dim V =3

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 8

Espacios vectoriales con producto interior. Ecuaciones de la recta y del plano

1) Sean $\vec{u} = (-3,1,2)$, $\vec{v} = (4,0,-8)$ y $\vec{w} = (6,-1-1)$, encuentre las componentes de $-3(\vec{v} - 8\vec{w})$

Respuesta:

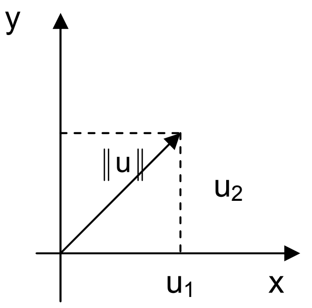
$$-3[(4,0,-8) - 8(6,-1,-4)] = -3[(4,0,-8) + (-48,8,32)] = (132,-24-72)$$

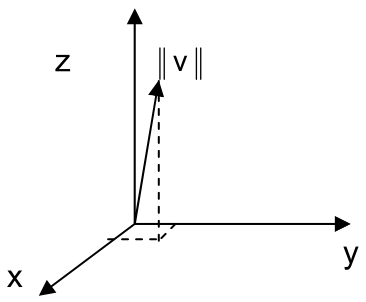
2) Encuentre la norma de $\vec{u}$=(2,2) y $\vec{v}$=(1,6,1).

Respuesta:

La norma de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes, es decir dado $\vec{v}=(x,y,...,z)$, su norma es: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + \cdots + z^2}$
En el esquema se muestra e

Un esquema se muestra a continuación





Para el caso particular planteado se tiene:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \;\text{ y }\; \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

3) Determine el versor del vector $\vec{u}$ dado en el ejercicio anterior.

Respuesta:

El versor de un vector $\vec{u}$ se define como: $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$

El versor de $\vec{u}$=(2,2) es $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{8}}(2{,}2) = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) Sean los vectores $\vec{u}$=(2,4), $\vec{v}$=(0,-1); $\vec{w}$=(2,-1); $\vec{s}$=(-1,0), y considerando el producto interior, calcule:

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$; $\vec{v} \bullet \vec{s}$ y $\vec{w} \bullet \vec{s}$
b) la longitud de los vectores dados
c) los ángulos directores
d) la medida del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$
e) un vector de norma 4 que sea paralelo a $\vec{u}$ pero de sentido contrario.

Respuesta:

El producto interior de dos vectores $\vec{u} \bullet \vec{v}$=(a,b).(c,d)=ac+bd

La longitud o norma es, como se indicó anteriormente $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + \cdots + z^2}$

El ángulo director: $tg\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

El ángulo comprendido entre dos vectores:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|u\|\,\|v\| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|u\|\,\|v\|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|u\|\,\|v\|}\right)$$

a) El producto interior es: $\vec{u} \bullet \vec{v}$=(2,4).(0,-1)=0-4=-4; $\vec{v} \bullet \vec{s}$=(0,-1).(-1,0)=0; $\vec{w} \bullet \vec{s}$=(2,-1).(-1,0)=-2

b) Longitud o Norma de los vectores:

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}; \quad \|v\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1; \quad \|w\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}; \quad \|s\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

c) Angulo director

$$tg\theta_u = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \theta = tg^{-1}(2) = 63{,}43^{\circ}; \qquad tg\theta_v = \frac{-1}{0} = indeterminada \Rightarrow \theta = 270^{\circ}$$

$$tg\theta_w = \frac{-1}{2} = -0{,}5 \Rightarrow \theta = tg^{-1}(-0{,}5) = 296{,}56^{\circ}; \quad tg\theta_s = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \theta = tg^{-1}(0) = 180^{\circ}$$

d) Angulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{-4}{\sqrt{20}\,.1} = -0{,}894 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0{,}894) = 153{,}43°$$

e) Para que sean paralelos pero de sentido contrario el ángulo entre ellos debe ser 180º

$u.v = \|u\|\,\|v\| \cos 180° = -17{,}89$

$(a,b).(c,d) = ac + bd = -17{,}89$

$2c + 4d = -17{,}89$ (recordando $u = (2,4)$) $\Rightarrow c = \dfrac{-17{,}89 - 4d}{2}$ (1)

Además $\|v'\| = 4 = \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow c^2 + d^2 = 16$ (2)

Reemplazando en (2) la (1): $\left(\dfrac{-17{,}89 - 4d}{2}\right)^2 + d^2 = 16$, resolviendo $(-8{,}95 - 2d)^2 + d^2 = 16$

$$-16 + 80{,}1 + 35{,}8d + 5d^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{-35{,}8 \pm \sqrt{(35{,}8)^2 - 4x64{,}01x5}}{2x5} \Rightarrow d = -3{,}46 \wedge -3{,}7$$

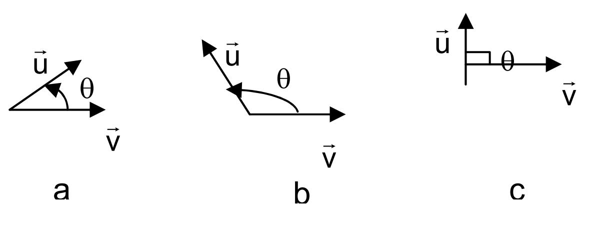
Los vectores son (-2,025;-3,46) y (-1,545;-3,7)

5) Determine si los vectores forman un ángulo agudo, obtuso o bien son ortogonales.
a) $\vec{u} = (1,1,4), \vec{v} = (2,0,1)$ b) $\vec{u} = (0,0,-1), \vec{v} = (2,2,2)$

Respuesta:

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formaran un ángulo:

agudo si $\vec{u} \bullet \vec{v}$ es mayor que 0
obtuso si $\vec{u} \bullet \vec{v}$ es menor que 0
recto, es decir son ortonormales si $\vec{u} \bullet \vec{v}$ es 0



a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ =(1,1,4) $\bullet$(2,0,1)=2+0+4=6 como es mayor que cero, el ángulo comprendido es agudo

b) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ =(0,0,-1) $\bullet$(2,2,2)=-2 como el valor es menor que cero el ángulo es obtuso

6) Indique si los siguientes vectores son paralelos u ortogonales: $\vec{u} = (12,16,20), \vec{v} = (0,0,2)$

Respuesta:

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si el ángulo comprendido entre ellos, θ, es 0º ó π, es decir si el cos θ=1 ó cosθ = -1 ., es decir si el cos θ=1 . Aplicando producto interior, serán paralelos si:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|u\|\,\|v\|} = 1$$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{12^2 + 16^2 + 20^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$ y $\|\vec{v}\| = 2$; $\cos\theta = \dfrac{40}{20\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 1$, por lo tanto los vectores no son paralelos.

7) Encuentre a) la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$, b) la componente vectorial de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{a}$ y c) la norma de la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$, siendo: $\vec{u} = (1,0,0), \vec{a} = (4,3,8)$.

Respuesta:

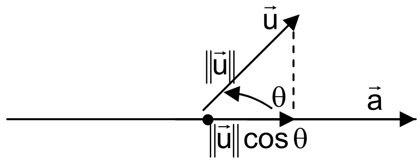
La proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$, también llamada componente vectorial de $\vec{u}$ a lo largo de $\vec{a}$ se define como: $\mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$

La componente vectorial de la proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$, responde a:

$$\vec{u} - \mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$$

La norma de la proyección es: $\|\mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \dfrac{|\vec{u} \bullet \vec{a}|}{\|\vec{a}\|} = \|\vec{u}\|\,|\cos\theta|$

En el esquema se observa la interpretación geométrica:



a) $\vec{u} \bullet \vec{a} = (1,0,0) \bullet (4,3,8) = 4$

$\|\vec{a}\|^2 = 4^2 + 3^2 + 8^2 = 16 + 9 + 64 = 89$

$\mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{u} = \dfrac{4}{89}(4,3,8) = \left(\dfrac{16}{89}, \dfrac{12}{89}, \dfrac{32}{89}\right)$

b) $\vec{u} - \mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{u} = (1,0,0) - \left(\dfrac{16}{89}, \dfrac{12}{89}, \dfrac{32}{89}\right) = \left(\dfrac{73}{89}, \dfrac{-12}{89}, \dfrac{-32}{89}\right)$

c) $\|\mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \dfrac{4}{\sqrt{89}}$

8) Sean $\vec{u} = (3,2,-1)$, $\vec{v} = (0,2,-3)$ y $\vec{w} = (2,6,7)$, calcule $u \times (\vec{v} - 2\vec{w})$

Respuesta:

Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son vectores en el espacio tridimensional, el producto vectorial o cruz $\vec{u}\times\vec{v}$ se define como:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$$

ó como determinantes:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v1 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

Para calcular $u\times(\vec{v}-2\vec{w})$, se determina $(\vec{v}-2\vec{w})=(0,2,-3)-2(2,6,7)=(-4,-10,-17)$

$$u\times(\vec{v}-2\vec{w})=(3,2,-1)\text{ x }(-4,-10,-17)=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -10 & -17\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & -17\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 2\\ -4 & -10\end{vmatrix}\right)=(-44,55,-22)$$

9) Calcule el área del paralelogramo de lados u y v con u=(1,2,3) y v=(4,5,6), si la unidad de medida es el m.

Respuesta:

$$\text{Area de paralelogramo=base x altura}=\vec{u}\times\vec{v}=\|u\|\,\|v\|\text{ sen}\theta$$

$$\|u\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\wedge\|v\|=\sqrt{4^2+5^2+6^2}=\sqrt{77}$$

$$\cos\theta=\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}=\frac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}}=0{,}9746\Rightarrow\theta=12{,}93^{\circ}$$

$$Area=\sqrt{14}\sqrt{77}\ sen\,12{,}93^{\circ}=7{,}35\ m^2$$

10) Calcule el volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{u}$=(2,6,2); $\vec{v}$=(0,4,2) y $\vec{w}$=(2,2,4), si las medidas están dadas en m

Respuesta:

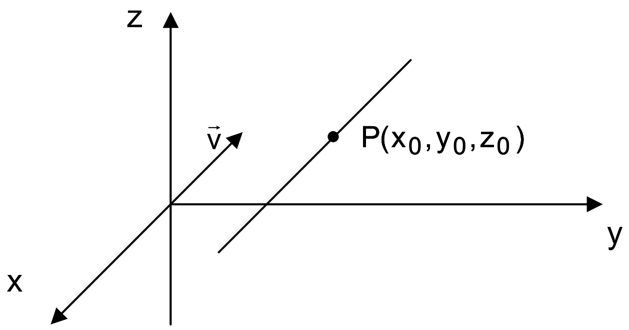
$$\text{Volumen de paralelepípedo}=|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

$$|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=(2,6,2)\bullet(9,4,2)\times(2,2,4)=2\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}9 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}9 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=236\ m^3$$

11) Calcule las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesianas de la recta que pasa por el punto P y y es paralela al vector $\vec{v}$. Siendo $P(-2,3,-3),\vec{v}=(6,-6,-2)$

Respuesta:

Dados un punto P=(x_0,y_0,z_0) y $\vec{v}$=(a_1,a_2,a_3), como se observa en el esquema, las ecuaciones de la recta son:



- Ecuación vectorial: $(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) = t\,(a_1,a_2,a_3)$

- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x - x_0 = t\,a_1 \\ y - y_0 = t\,a_2 \\ z - z_0 = t\,a_3 \end{cases}$

- Ecuación cartesiana: $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0 \quad \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$

La ecuación vectorial es: $(x,y,z) = (-2,3,-3) = t\,(6,-6,-2)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x + 2 = 6t \\ y - 3_0 = -6t \\ z + 3 = -2t \end{cases}$

Ecuación cartesiana: $\dfrac{x+2}{6} = \dfrac{y-3}{-6} = \dfrac{z+3}{-2}$

12) A partir de las ecuaciones cartesianas $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{-5}$, exprese las ecuaciones implícita, explícita y segmentaria.

Respuesta:

La ecuación explícita de la recta es y= mx + b, la implícita o general es ax + by + c= 0 y la segmentaria: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

La ecuación $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{-5}$, se puede escribir como:

-5x - 10=2y + 2,
-5x – 10-2y – 2=0

5x + 2y + 12=0 ecuación implícita

La ecuación $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-5}$, se también se puede escribir como:

y+1= - $\frac{5}{2}$ (x+2), despejando y, se tiene y= -$\frac{5}{2}$ x – 6, que es la ecuación explícita.

La ecuación segmentaria es: $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

13) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por:

a) (2,-2) y es paralela a la recta que pasa por: (1,-4) y (-3,4)

b) (1,2,4) y es paralela a la recta: $\frac{x_1+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{6}$

Respuesta:
a)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-4)}{-3-1}=\frac{-8}{4}=-2$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+4=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x-2$$

Para que las rectas sean paralelas las pendientes deben ser iguales

$$y+2=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+2$$

b) Se puede utilizar la forma paramétrica (x-P)=t A, estando A formado por los denominadores de la ecuación cartesiana.

(x,y,z)-(1,2,4)=t(1,3,6),

Las ecuaciones son: $\begin{cases} x-1=t \\ y-2=3t, \text{la ecuación cartesiana es}: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{6} \\ z-4=6t \end{cases}$, como tiene la misma pendiente es paralela a la recta dada.

14) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por:

a) (1,-2,-4) y (2,3,-6)

b) (1,-2) y es perpendicular a la recta 2x+4y-10= y

Respuesta:

a) Utilizando la forma cartesiana:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+2}{3-(-2)}=\frac{z+4}{-6-(-4)}$$
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+4}{-2}$$

b) Dos rectas son perpendiculares si y solo si:$m_1=-1/m_2$ es decir:

$m_1.m_2=-1$

La ecuación de la recta es: 2x+4y-10=0

4y=-2x+10

y=-1/2 x+5/2, por lo tanto $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{(-0,5)}=2$

La pendiente de la recta debe ser 2, por lo tanto:

$$y-y_1=m_2(x-x_1)$$
$$y+2=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2-2=2x-4$$

La ecuación es y = 2x - 4

15) Encuentre la ecuación de una recta que pase por el punto (6,2) y sea perpendicular a la recta dada: (3,-2), x+8y=-3

Respuesta:

Para que dos rectas sean ortogonales dada la ecuación ax+by+c=0, la segunda recta debe ser de ecuación bx-ay+d y se reemplazan luego las componentes del punto.

8x – y=8.6 + (-1).2=48-2=46

Por lo tanto la ecuación de la recta ortogonal que para por el punto dado es:
8x –y=46

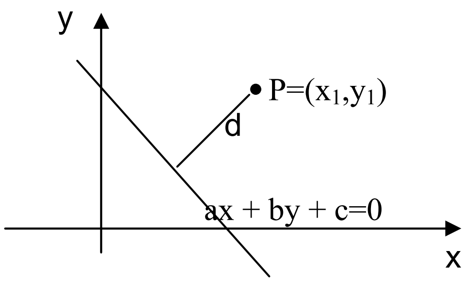
16) Calcule la distancia de la recta 5x-12y-26=0 al punto (9,0)

Respuesta:

La distancia de una recta de ecuación ax + by + c=0 al punto $P=(x_1,y_1)$ se define como:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Un esquema esclarece el problema:



Por lo tanto $d = \dfrac{|5(9)-12(0)-26|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \dfrac{19}{13}$, (la distancia es siempre positiva)

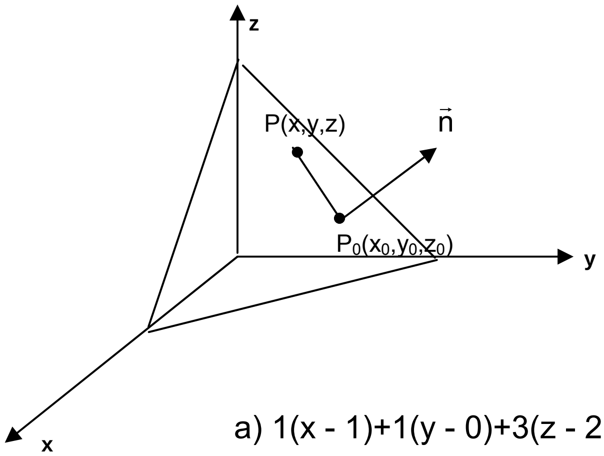
17) Determine las ecuaciones del plano que contienen al punto P y son ortogonales a $\vec{n}$

a) P=(1,0,2), $\vec{n}$=(1,1,3)

b) P=(2,-4,2), $\vec{n}$=(-2,4,6)

Respuesta:

Siendo $\vec{n}$=(a,b,c) y P=(x_0,y_0,z_0), la ecuación del plano es: a(x - x_0)+b(y - y_0)+c(z - z_0)=0, en el esquema que sigue se observa que el plano consta de los puntos P(x,y,z) para los cuales el vector entre P y P0 es ortogonal a $\vec{n}$, es decir el producto interior entre los mismos es igual a 0.



a) 1(x - 1)+1(y - 0)+3(z - 2)=0

x-1+y+3z=0

x+y+3z-7=0

b) -2(x - 2)+4(y +4)+6(z - 2)=0

-2x+4+4y+16+6z-12=0

-2x+4y+6z+8=0

x-2y-3z-4=0

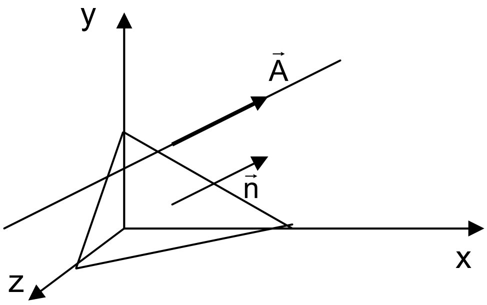
18) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto P=(1,4,2) y es paralelo a:

$$\begin{cases} x-2=10t \\ y+1=-4t \\ z-3=12t \end{cases}$$

Respuesta:

Una recta es perpendicular a un plano si la dirección de la recta está incluida en el plano, para ello $\vec{A}$ debe ser perpendicular a $\vec{n}$ (es decir $\vec{n}.\vec{A}$=0), siendo $\vec{A}$ el vector formado con los denominadores de la ecuación paramétrica y $\vec{n}$ el vector normal.

En el esquema puede visualizarse el problema:



P=(1,4,2), A=(10,-4,12)(formado con los denominadores de la ecuación paramétrica), N=(a,b,c)

(a,b,c)(10,-4,12)=0

$$10a-4b+12c=0, \text{ entonces } c=\frac{-10a+4b}{12}, \text{ si } a=0 \text{ y } B=1,\ c=1/3$$

Entonces:

$$[(x,y,z)-(1,4,2)].(0,1,1/3)=0$$

$$(x-1,y-4,z-2)(0,1,1/3)=0$$

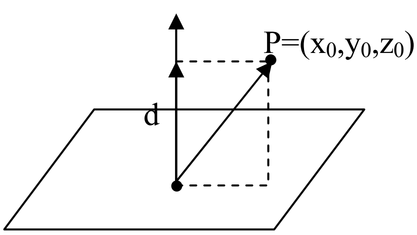
$$y-4+1/3\ z-2/3=0$$

$$y+1/3z-14/3=0 \text{ es la ecuación del plano}$$

19) Encuentre la distancia entre el punto P(1,-4,-3) y el plano 2x-3y+6z=-1

La distancia de un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ a un plano de ecuación ax + bx + cz + d=0 se define como:

$$d=\frac{|a x_0+b y_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Por lo tanto: $d=\dfrac{|2(1)+(-3)(-4)+6(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\dfrac{|-3|}{7}=\dfrac{3}{7}$

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 9

Valores y Vectores propios

1) Encuentre los valores, vectores propios y bases de los espacios propios generados por la transformación lineal: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x,y)=(2x, x+y)$

Respuesta

Aplicando la ecuación $T(\vec{v}) = \lambda\ \vec{v}$

$T(x,y)= \lambda\ (x,y)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y para x o y distintos de 0. Utilizando la definición de la transformación lineal y por igualdad de pares ordenados, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x = \lambda x \qquad \text{si } x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ x+y=\lambda y \Rightarrow x+y = 2y \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Por lo tanto todo vector de componentes opuestas (x, x) con $x \neq 0$ es *un vector propio que pertenece al valor propio 2.*

El espacio propio de T correspondiente a $\lambda=2$ tiene la base $B_1=\{(1,1)\}$

Si x=0 entonces en la segunda ecuación del sistema se tiene $y = \lambda y \Rightarrow \lambda=1$, entonces los vectores de la forma (0,y) con $y \neq 0$, son los *vectores propios que pertenecen al valor propio 1.*

El espacio propio de T correspondiente a $\lambda=1$ tiene la base $B_2=\{(0,1)\}$

2) Encuentre el polinomio característico y calcule los valores propios de la matriz $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se plantea $(A - \lambda\ I)$

$$(A - \lambda\ I)= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es:

$$|(A - \lambda\ I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$, resolviendo se tiene: $(-2 - \lambda)(2 - \lambda) + 5 = 0$, es decir:

$- 4 + \lambda^2 +5 = 0$, que reordenando es: $\lambda^2 + 1 = 0$ y cuyas raíces son $\lambda_1=i$ y $\lambda_2= -i$ que son los valores propios de A.

3) Calcule los valores y vectores propios de A=$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Respuesta

Los valores propios de A se obtiene a partir de:

$$(A - \lambda\ I)= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

Los valores propios de A son λ_1=1y λ_2= 6

Resolviendo para λ_1=1:

$(A - \lambda_i I)\ \vec{x} = \vec{0}$, reemplazando: $\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto cualquier vector propio que corresponde a λ_1=1 satisface a $3x_1+2x_2=0$, se deduce que $x_2 = \frac{-3}{2}x_1$, entonces un vector propio correspondiente a λ_1 tiene las siguientes componentes:

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{-3}{2}$$

otro ejemplo, $x_1 = 2 \Rightarrow x_2=-3$, que es otro vector propio correspondiente a λ_1, etc.

Entonces se puede decir que $E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} \right\rangle$ es el espacio generado por los vectores

(1,-3/2), (2,-3), etc. La base del espacio es $B_1 = \{(1,-3/2)\}$ o también $B_1 = \{(2,-3)\}$

Análogamente si λ_2= 6, se tiene:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2x'_1+2x'_2 \\ 3x'_1-3x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, resolviendo se llega a que $x'_2 = x'_1$ por lo tanto la base del espacio generado es $B_2 = \{(1,1)\}$

4) Determine si la matriz A=$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable. Si lo es, encuentre la matriz C que la diagonaliza.

Respuesta

En el ejercicio 3) se determinaron los valores característicos λ_1=1 y λ_2= 6, como son distintos, la matriz es diagonalizable. Los vectores característicos son (2,-3) y (1,1) Se forma la matriz C=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ con esos vectores característicos, se calcula $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, luego se calcula el producto $C^{-1}AC$, que se desarrolla como:

$C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, la matriz resultante tiene como elementos diagonales a los valores propios de A y es la matriz diagonal D similar a A.

5) Encuentre la diagonalización ortogonal de la matriz A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Respuesta

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda = 0$, resolviendo λ_1=0 y λ_2= 5.

Los autovectores asociados a λ_1=0 se obtienen resolviendo:*(A - λ_i I)* $\vec{x} = \vec{0}$,

reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

reduciendo por renglones $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que produce el espacio propio $E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Los autovectores asociados a λ_1=5 se obtienen resolviendo:*(A - λ_i I)* $\vec{x} = \vec{0}$,

reemplazando:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

reduciendo por renglones $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que produce el espacio propio $E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

Se observa que si se realiza el producto $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \therefore \text{son ortogonales}$.

Para obtener C se deben normalizar los autovectores:

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Así $D = C^{-1}AC = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
que es una diagonalización ortogonal de A.

5) Utilizando el método de las potencias calcule el valor y vector característicos dominantes de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sabiendo que las raíces del polinomio son 2 y 1.

Respuesta

El eigenespacio correspondiente al valor dominante $\lambda_1 = 2$ es el espacio solución del sistema:

$$(A-2I)\, v = \vec{0}$$

Es decir:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $v_1 = -2k$; $v_2 = k$. Por lo tanto los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = 2$ son vectores distintos del vector nulo de la forma:

$v = \begin{bmatrix} -2k \\ k \end{bmatrix}$

Arbitrariamente se selecciona $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, que al multiplicar reiteradamente por A se obtiene:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta_1^{(1)} = \frac{5}{1} = 5 \quad \beta_2^{(1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x_2 = A^2 x_0 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta_1^{(2)} = \frac{13}{5} = 2{,}6 \quad \beta_2^{(2)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Así se continúa iterando, de manera que realizando 7 iteraciones se obtiene la siguiente tabla:

k	x_k	$\beta_1^{(k)}$	$\beta_2^{(k)}$
0	(1,1)	-	-
1	(5,-1)	5	-1
2	(13,-5)	2,6	5
3	(29,-13)	2,23	2,6
4	(61,-29)	2,10	2,23
5	(125,-61)	2,05	2,10
6	(253,-125)	2,02	2,05
7	(509,-253)	2,01	2,02

Por lo tanto el valor dominante tiende a 2 y el autovector característico, correspondiente al autovalor dominante es (509,-253).

GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS Nº 10

Cónicas y Cuádricas

1) Encuentre la ecuación de una circunferencia de radio 6 y centro (-3,2).

Respuesta

Una circunferencia es el conjunto de puntos sobre un plano que son equidistantes a un punto fijo sobre el plano llamado centro C=(h,k). La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se denomina radio (r). La ecuación de la circunferencia es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Por lo tanto, $(x – (-3))^2 + (y - 2)^2 = 6^2$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 +6x – 4y -23=0$$

2) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: P=(1,-2); Q=(5,4) y R=(10,5)

Respuesta

La ecuación de la circunferencia desarrollando $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es

$$x^2 + y^2 +Dx + Ey +F=0$$

Se sustituyen x y y con las coordenadas de los puntos, se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que debe resolverse para calcular D, E y F.

$$\begin{cases} 1 + 4 + D - 2E + F=0 \\ 25 + 16 + 5D + 4E + F=0 \\ 100 + 25 + 10D + 5E + F=0 \end{cases}$$

Resolviendo D=-18, E=6 y F=25, por lo tanto la ecuación es: $x^2 + y^2 -18x + 6y +25=0$

3) Halle la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas: x + 2y -4=0 y x – 2y – 1=0

Respuesta

El punto de intersección se obtiene resolviendo las ecuaciones de recta simultáneamente.

x=5/2 y y=3/4, el centro C = (5/2 , 3/4), como la circunferencia pasa por el origen, el radio es : $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=2{,}6$, la ecuación de la circunferencia es: $(x - 5/2)^2 + (y - 3/4)^2 = (2{,}6)^2$

4) Escriba la ecuación de una parábola con vértice en el origen de coordenadas y el foco en (0,6).

Respuesta

La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (0,a) es $x^2= 4ay$.
La parábola se abre hacia arriba si a>0 y hacia abajo si a<0
La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (a,0) es $y^2= 4ax$
La parábola se abre hacia la derecha si a>0 y hacia la izquierda si a<0

$x^2= 4ay$, como la distancia del vértice al foco es 6, entonces a=6, $x^2= 4.6y=24\,y$

5) Una parábola tiene su vértice en el origen de coordenadas, su eje a lo largo del eje x y pasa por el punto P=(-4,8). Encuentre su ecuación

Respuesta

$$y^2 = 4ax$$
$$64 = 4a(-4) \Rightarrow 4a = -64/16=-4$$
$$y^2 = -4x \text{ y el foco está en } (-4,0)$$

6) Dada ecuación de una parábola $x^2= -2y$, encuentre las coordenadas del foco, la ecuación directriz y la longitud del lado recto.

Respuesta

Como $x^2= -2y$, 4a=-2 y a=-1/2, por lo tanto las coordenadas del foco son (0,-1/2)
La ecuación directriz es y=1/2
La longitud del lado recto es $|4a| = 2$

7) Calcule las coordenadas del vértice, el foco y la longitud del lado recto de la parábola:

$$y^2 +10x + 6y -1=0$$

Respuesta

$$y^2 +10x + 6y -1=0$$

Completando cuadrados se tiene: $y^2 + 6y +9= -10x + 1 + 9$

$$(y+3)^2 = -10(x + 1)$$

El vértice es (-1,-3), $4a=-10\Rightarrow a=-2$, el foco está 2 unidades a la izquierda del vértice y la longitud del lado recto es 10, 5 unidades por arriba y 5 por debajo del vértice.

8) Indique la ecuación de una elipse con focos en (0,±3) y un vértice en (0,6)

Respuesta

La ecuación de una elipse cuyos focos están en (-c,0) y (c,0) es : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

La ecuación de una elipse cuyos focos están en (0,-c) y (0,c) es : $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$; $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Además $b^2= a^2-c^2$

La localización de los focos indica que el centro de la elipse está en el origen, c=4, a=6

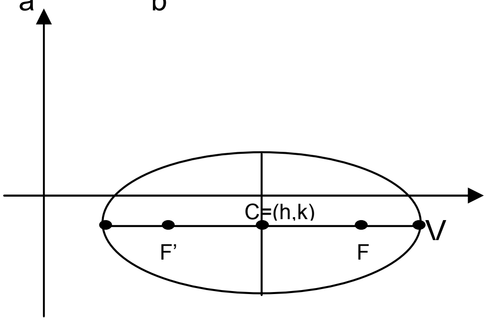
b^2= 36-16=20, por lo tanto la ecuación es: $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{20}=1$

9) Encuentre la ecuación de la elipse con focos en (8,-1) y (16,-1) y un vértice en (15,-1).

Respuesta

Si el centro de la elipse no se encuentra en el origen de coordenadas, se puede ubicar fácilmente puesto que está a la mitad de la distancia entre los focos. Siendo F' y F los focos, el centro C=(h,k)= ½(F+F')

La ecuación es: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, si la elipse tiene el eje mayor paralelo al eje de abscisas.



La distancia entre focos es $\sqrt{(F-F')^2}$, y el valor de c es ½ de la distancia entre focos. El valor de a es la distancia entre el vértice V y el centro C, o sea $\sqrt{(V-C)^2}$.

En el caso particular del problema, para ubicarlo se suman las componentes de los pares ordenados que definen los focos: (8,-1) + (16,-1)=(24,-2), como el centro está a la mitad entre focos: ½(24,-2)=(12,-1) (centro).

La distancia entre focos es $\sqrt{(F-F')^2}$, (F-F')=(16,-1)-(8,-1)=(8,0) por lo tanto la distancia es 8. Como el vértice se encuentra en (18,-1), la distancia de este vértice al centro es (18,-1)-(12,-1)=(6,0), es decir a 6 unidades del centro, por lo tanto a=6. El valor de c es ½ de la distancia entre focos es decir ½ de 8, es decir c=4.

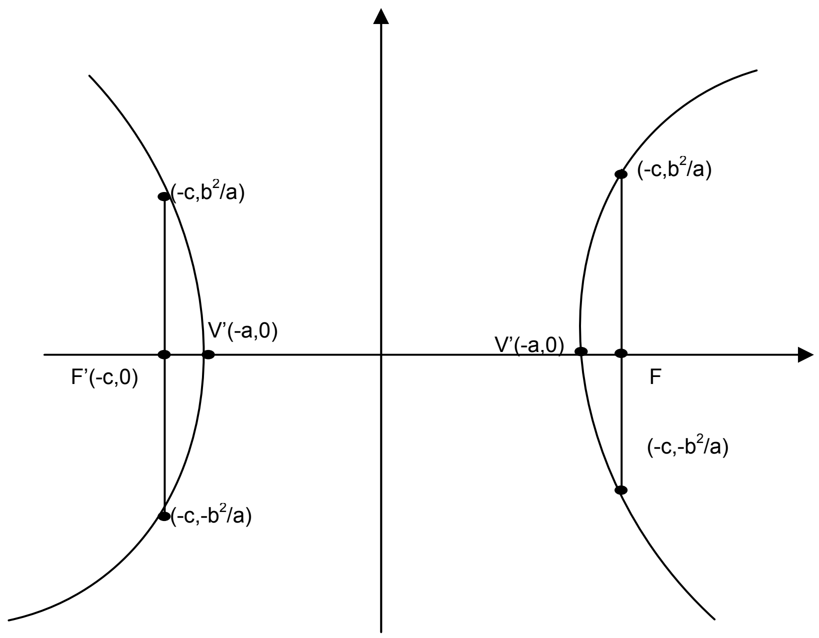
Como $b^2= a^2-c^2= 36-16=20$, la ecuación es: $\frac{(x-12)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$

10) Determine las coordenadas de los vértices y de los focos, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$

Respuesta

Una hipérbola es el conjunto de puntos en un plano tal que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, en la que $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}$ y $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Los puntos V'(-a,0) y V(a,0) son los vértices, VV' es el eje transversal. El eje conjugado está definido por B'=(0,-b) y B=(0,b). La intersección de estos ejes se denomina centro y la cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje transversal se denomina lado recto. Los extremos del lado recto se calculan a partir de la relación $c^2=a^2+b^2$ y son $(c,-b^2/a)$ y $(c,b^2/a)$, por lo tanto su longitud es $2b^2/a$. Sus asíntotas son $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$



En el ejercicio se tiene que a=5 y b=2. El valor de c se puede calcular como: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}=5{,}4$. Los vértices son (±5,0) y los focos (±5.4,0). Cada lado recto tiene una longitud de $2b^2/a$, por lo tanto esta longitud es 8/5. Las asíntotas son $y=\frac{2}{5}x,\ y=-\frac{2}{5}x$

11) Indique el centro y radio de la esfera descripta por $x^2+y^2+z^2-4x+12y+16z+30=0$

Respuesta

Las ecuaciones que define a una esfera son:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=a^2$$

$$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz-H=0$$

Para el ejercicio se deben completar cuadrados en los términos de x, y y z.

$$(x^2-4x+4)+(y^2+12y+36)+(z^2+16z+64)=-30+4+36+64$$

$$(x-2)^2+(y+6)^2+(z+8)^2=74$$

Es una esfera de centro C=(2,-6,-8) y radio $\sqrt{74}$

12) A que superficie corresponden las ecuaciones:

a) $x^2+y^2=16z$ b) $9x^2+y^2+9z^2=36$

Respuesta

a) Al reemplazar x por –x y y por –y no se altera la ecuación, por lo tanto la superficie es simétrica a los planos yz y xz. Como x=0, y=0 y z=0 satisface la ecuación, el origen de coordenadas está en la superficie. La traza en el plano yz para x=0 es la parábola $y^2=4z$, la traza en xz para y=0 es la parábola $x^2=4z$ y la traza en el plano xy para z=0 es $x^2+y^2=0$. Puede decirse que la superficie es un paraboloide.

b) Dado $9x^2+y^2+9z^2=36$, al reemplazar x por –x y y por –y ; z por –z no se altera la ecuación, por lo tanto la superficie es simétrica a los planos yz ; xz y xy. (Simetría total)

La traza del plano yz es la elipse $\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{4}=1$; $x=0$

La traza del plano xz es la circunferencia: $x^2+z^2=4$; $y=0$

La traza del plano xy es la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$; $z=0$

La superficie es un elipsoide

13) Identifique las siguientes superficies cuádricas:

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{20}=1$ b) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{20}=1$ c) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=20z$

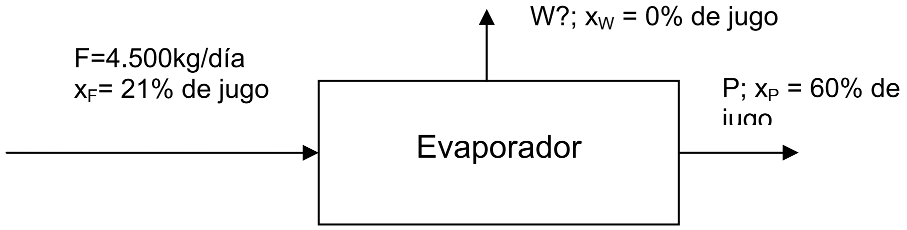
Respuesta

a) hiperboloide de una hoja b) hiperboloide de dos hojas c) paraboloide elíptico

PROBLEMAS ABIERTOS DE APLICACIÓN

1- En un proceso de elaboración de jugos de fruta se emplea un evaporador el cual recibe una alimentación de 4.500 kg por día de jugo con 21% de concentración. El producto final se debe concentrar hasta un 60%. Calcule la cantidad de agua evaporada.

Respuesta:



Datos:

F: alimentación
P: producto
W: cantidad de agua
x: fracciones

$$\Rightarrow \begin{cases} F = W + P \\ Fx_F = Wx_W + Px_P \end{cases} \qquad \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 0.6 & 4500(0.21) \end{matrix} \right| \qquad \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 0.6 & 945 \end{matrix} \right|$$

$$\Rightarrow x = 2.925kg/día = W$$
$$y = 1.575kg/día = P$$

2- Se tienen dos tipos de alimentos para perros uno de \$50 /kg y el otro de \$65/kg ¿Cuántos kg de cada alimentos se deben mezclar para obtener 1 tn a \$ 54 por kilo?

Respuesta:

x_A= \$50/kg donde: x: costo
x_B= \$65/kg A, B : kg de alimento
M: kg de mezcla

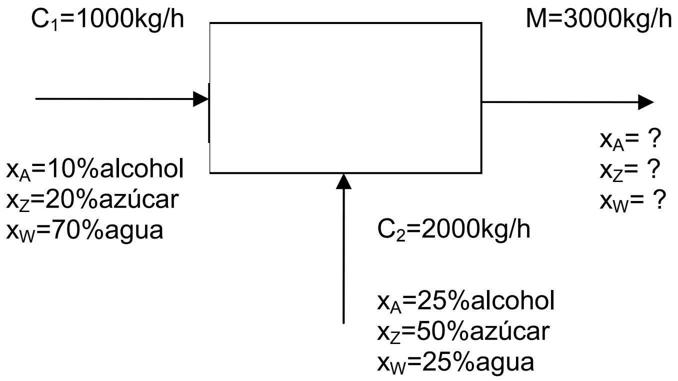
A=? [kg] M = 1000 kg
B=? [kg] x_M = \$54/kg

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = M \\ Ax_A + Bx_B = Mx_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 50 & 65 & 1000(54) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 50 & 65 & 54000 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow x = A = 733.3kg \\ y = B = 266.7kg \end{matrix}$$

3- Una corriente de 1.000 kg/h que contiene 10% de alcohol, 20% de azúcar y resto de agua, se mezcla con 2000 kg/h de una corriente con 25 % de alcohol, 50% de azúcar y el resto agua. Determinar la composición de la mezcla resultante.

Respuesta:



donde:

C_1: corriente 1 — x_A: concentración de alcohol
C_2: corriente 2 — x_Z: concentración de azúcar
M: mezcla — x_W: concentración de agua

x_{AM}, x_{ZM} y x_{WM} son las concentraciones en la mezcla M, y

$$x_{AM} + x_{ZM} + x_{WM} = 1 \qquad (4)$$

BC (alcohol)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = M & (1) \\ C_1 x_A + C_2 x_A = M x_{AM} & (2) \\ C_1 x_Z + C_2 x_Z = M x_{ZM} & (3) \end{cases}$$

El problema se resuelve por sustitución:

de (2): $x_{AM} = \dfrac{C_1 x_A + C_2 x_A}{M}$

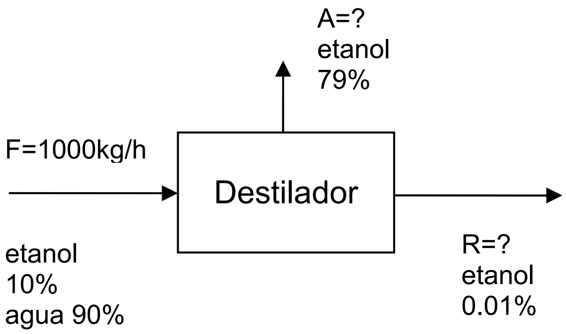
$$x_{AM} = \frac{1000(0{,}1) + 2000(0{,}25)}{3000} = 0{,}2$$

de (3): $x_{ZM} = \dfrac{C_1 x_Z + C_2 x_Z}{M} = \dfrac{1000(0{,}2) + 2000(0{,}5)}{3000} = 0{,}4$

de (4): $x_{WM} = 1 - x_{AM} - x_{ZM} = 1 - 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}4$

4- Se trata de concentrar una disolución de alcohol en un destilador. Ingresan 1.000 kg/h a 25ºC con una concentración de etanol de 10%. Por la parte superior sale alcohol con 79% de etanol y por la parte inferior sale un residuo con mucha agua y 0,01% de etanol. Determinar los flujos de la corriente.

Respuesta:



donde:
F: alimentación
A: alcohol
R: residuo
x_E: concentración de etanol

$$\begin{cases} F = A + R & (1) \\ Fx_E = Ax_E + Rx_E & (2) \end{cases}$$

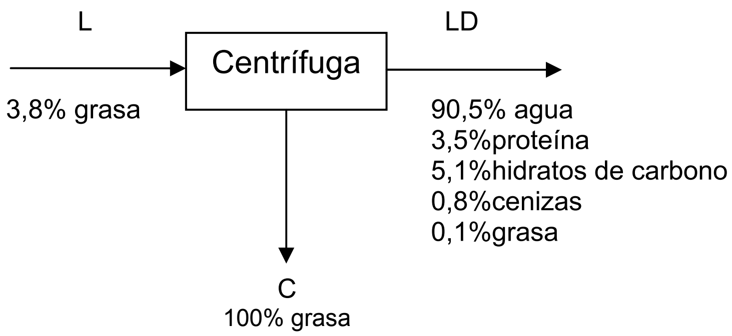
$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \vdots \; 1000 \\ 0{,}79 & 0{,}0001 & \vdots \; 100 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow x = A = 126{,}5 kg/h$$
$$y = R = 873{,}5 kg/h$$

5- La leche desnatada que se obtiene de eliminar grasa de una leche entera con 3,8% de grasa contiene: 90,5 de agua, 3,5 % de proteína, 5,1 % de hidratos de carbono, 0,8 de cenizas y 0,1 % de grasas. Calcular la cantidad de crema y de leche descremada suponiendo que:

a) Se obtiene crema al 100% de grasa

b) Que la crema obtenida contiene 65% de grasa.



donde:
L: leche entera
LD: leche descremada
C: crema
x: fracción molar

Suponiendo L = 100kg/h

a) $\begin{cases} L = C + LD \\ Lx_L = Cx_C + LDx_{LD} \end{cases}$ $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}001 \end{array} \vdots \begin{array}{c} 100 \\ 3{,}8 \end{array}\right|$

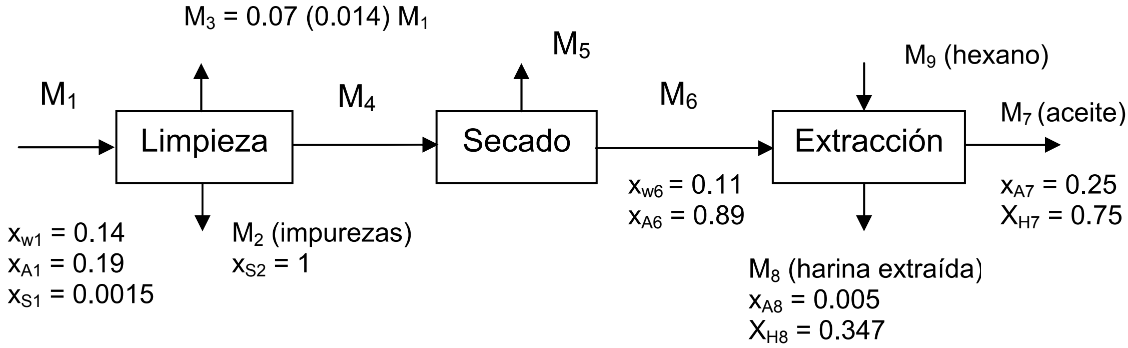
$$\Rightarrow x = C = 3{,}7kg/h$$
$$y = LD = 96{,}3kg/h$$

b) $\begin{cases} L = C + LD \\ Lx_L = Cx_C + LDx_{LD} \end{cases}$ $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0{,}65 & 0{,}001 \end{array} \vdots \begin{array}{c} 100 \\ 3{,}8 \end{array}\right|$

$$\Rightarrow x = C = 5{,}7kg/h$$
$$y = LD = 94{,}3kg/h$$

6- En una fábrica de aceite de soja de proceso continuo, la semilla que ingresa contiene 1,5% de materias extrañas, 14% de humedad y 19% de aceite. El sistema de extracción tiene capacidad para procesar 300 ton/día de soja limpia con 11% de humedad.
La semilla es sometida a una operación de limpieza, donde se elimina la totalidad de las impurezas, pero además pierde un 7% del agua que contiene; posteriormente es secada hasta la humedad de procesamiento. Una vez limpia y seca, la soja se somete a una operación de extracción con solventes (hexano), obteniéndose una micela con 25% de aceite y una harina con 34,7% de hexano y 0,5% de aceite.
Calcular los flujos másicos involucrados en el proceso.

Respuesta:



1)

<u>Datos</u>
M_6 = 300 ton/día = 12.500 kg/h

<u>Referencias</u>
W: agua
A: aceite
S: impurezas
H: hexano
<u>BG</u>

$$\begin{cases} M_1 = M_2 + M_3 + M_4 \quad (1) \\ M_1 x_{S1} = M_2 \quad (2) \\ M_1 x_{W1} = M_3 + M_4 x_{W4} = 9{,}8.10^{-3} M_1 + M_4 x_{W4} \quad (3) \end{cases}$$

Se reemplaza (2) y (3) en (1)

$M_1 = M_1 x_{S1} + M_1 x_{W1} - M_4 x_{W4} + M_4$ (4)
$M_1 - M_1 x_{S1} - M_1 x_{W1} = M_4 (1 - x_{W4})$ (5)
$M_1 (1 - x_{S1} - x_{W1}) = M_4 (1 - x_{W4})$ (6)

=> $M_4 = \dfrac{(1 - x_{S1} - x_{W1}) M_1}{(1 - x_{W4})}$ (7)

$$M_4 = \frac{(1 - 0.015 - 0.14) M_1}{(1 - x_{W4})} = \frac{0.845 M_1}{(1 - x_{W4})}$$

Se reemplaza (7) y (2) en (1)

$$M_1 = M_1 x_{S1} + 9{,}8.10^{-3} M_1 + \frac{0{,}845 M_1}{(1 - x_{W4})} \qquad (8)$$

$$M_1 - M_1 x_{S1} - 9{,}8.10^{-3} M_1 = \frac{0{,}845 M_1}{(1 - x_{W4})}$$

$$M_1 (1 - x_{S1} - 9{,}8.10^{-3}) = \frac{0{,}845 M_1}{(1 - x_{W4})}$$

$$M_1 .0{,}975 = \frac{0{,}845 M_1}{1 - x_{W4}}$$

=> $1 - x_{W4} = \dfrac{0{,}845 M_1}{0{,}975 M_1} \Rightarrow x_{W4} = -0{,}866 + 1 = 0{,}133$

Reemplazando x_{W4} en (7)

$$M_4 = \frac{0.845 M_1}{(1 - 0{,}133)} = 0{,}975 M_1 \quad (9)$$

$$\begin{cases} M_4 = M_5 + M_6 & (10) \\ M_4 x_{W4} = M_5 x_{W5} + M_6 x_{W6} & (11) \end{cases}$$

de (10), $M_5 = M_4 - M_6$, y considerando que $x_{W5} = 1$, se reemplaza (9) y (10) en (11)

$(0{,}975M_1)\ x_{W4} = (0{,}975M_1 - M_6).1 + M_6 x_{W6}$

$M_1.0{,}975\ x_{W4} - 0{,}975M_1 = M_6\,(x_{W6} - 1)$

$M_1\ (0{,}975\ x_{W4} - 0{,}975) = M_6\,(x_{W6} - 1)$

$$M_1 = \frac{M_6 (x_{W6} - 1)}{0{,}975 x_{W4} - 0{,}975} = \frac{12500\ kg/h\,.(0{,}11 - 1)}{0{,}975.\ 0{,}133 - 0{,}975}$$

$\boxed{M_1 = 13160 \text{ kg/h}}$

$M_4 = 0{,}975\ (13600 \text{ kg/h}) = \boxed{12831 \text{ kg/h}}$

de (10), $M_5 = (12831 - 12500) \text{ kg/h} = \boxed{332 \text{ kg/h}}$

de (2), $M_2 = 13160 \text{ kg/h} .\ 0{,}015 = \boxed{197 \text{ kg/h}}$

de (1), $M_3 = M_1 - M_2 - M_4$

$M_3 = (13160 - 197 - 12831) \text{ kg/h} = \boxed{131{,}6 \text{ kg/h}}$

En la extracción se tienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} M_6 + M_9 = M_7 + M_8 & (12) \\ M_6 x_{W6} = M_7 x_{A7} + M_8 x_{A8} & (13) \\ M_9 x_{H9} = M_7 x_{H7} + M_8 x_{H8} & (14) \end{cases}$$

Por determinantes:

M_7 = 15625 kg/h
M_8 = 9187 kg/h
M_9 = 12312 kg/h

2) Control de Procesos: criterio de Raoult-Henry

No requiere calcular los valores de las raíces de los polinomios; solamente requiere que si alguna de las raíces se encuentra en el lado derecho del eje imaginario o que exista alguna raíz positiva, entonces el sistema es inestable.

⇨ $1 + G_cG_vG_pG_h = J_0S^n + J_1S^{n-1} + \ldots + J_{n-1}S + J_n = 0$ (Se resuelve por determinante)

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Análisis Vectorial y una Introducción al Análisis Tensorial. Murray Spiegel. Mc Graw Hill. México. 1991.
- Introducción al Algebra Lineal. Howard Anton. 2º Edición. Limusa-Noriega Editores. México. 1997
- Geometría Analítica. G. Fuller, D. Tarwater. 7º edición. Addison-Wesley Iberoamericana. USA. 1995.
- Algebra. Armando Rojo. Editorial Librería El Ateneo. Argentina. 1995.
- Algebra y trigonometría con aplicaciones. L. Murphy Johnson y Arnold R. Steffensen. Editorial Trillas, S.A. de C.V. México. 1994