UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

FACULTAD DE AGRONOMIA Y AGROINDUSTRIAS

CURSO DE INGRESO 2010

CUADERNILLO DE MATEMÁTICAS

Autora: Dra. Lucrecia L. Chaillou

INDICE

UNIDAD 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

MAGNITUDES PROPORCIONALES

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números Naturales (N)

Los primeros números utilizados por los seres humanos fueron los números naturales: 1, 2, 3, 4, ... El conjunto de Números Naturales se denota con N:

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

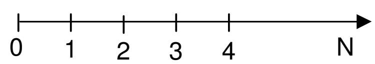
Si se incluye el cero se escribe N_0:

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

El conjunto de NUMEROS NATURALES posee las siguientes propiedades:

- Es un conjunto ordenado según la relación de menor
- Tiene primer elemento
- Es un conjunto infinito (no tiene último elemento)
- No es denso, es discreto porque entre dos elementos cualesquiera existe un número finito de números naturales

Este conjunto se puede representar en una recta numérica:



En la recta puede verse el orden de estos números, por ejemplo:

- 0 es menor que 2, en símbolos: $0 < 2$
- 4 es mayor que 3, $4 > 3$

En general, el número α es mayor que β ($\alpha > \beta$), si α se encuentra a la izquierda de β.

Operaciones en el conjunto de Números Naturales

1. ADICION o SUMA

$$\underbrace{1 + 3 + 4}_{\text{Sumandos}} = 8 \leftarrow \text{Suma o resultado}$$

Propiedades de la adición o suma:

1.- La suma cumple la ley de clausura, es decir, la suma de números naturales tiene como resultado otro número natural.

$$\forall \alpha, \beta \in N : \alpha + \beta \in N$$

2.- La suma es asociativa, es decir, que el resultado no varía si se realizan sumas parciales

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

3.- La suma es conmutativa, es decir, el orden de los sumandos no altera la suma

$$\forall \alpha, \beta \in N : (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha)$$

4.- Existencia de elemento neutro: el cero es el elemento neutro para la suma

$$\forall \alpha \in N : (\alpha + 0) = (0 + \alpha) = \alpha$$

2. MULTIPLICACIÓN

Los términos de una multiplicación se llaman FACTORES, el resultado de la multiplicación se denomina PRODUCTO.

1 . 3 . 4= 12 ← Producto

Factores

Propiedades del producto:

1.- El producto es una ley de composición interna, es decir, el producto de números naturales tiene como resultado otro número natural.

$$\forall \alpha, \beta \in N : \alpha \,.\, \beta \in N$$

2.- El producto es asociativo, es decir, que el resultado no varía si se realizan productos parciales

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha\ (\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta)\ \gamma$$

3.- El producto es conmutativo, es decir, el orden de los factores no altera el producto

$$\forall \alpha, \beta \in N : (\alpha \,.\, \beta) = (\beta \,.\, \alpha)$$

4.- Existencia de elemento neutro: el uno es el elemento neutro para el producto

$$\forall \alpha \in N : (\alpha \,.\, 1) = (1 \,.\, \alpha) = \alpha$$

5.- La multiplicación es distributiva con respecto a la suma.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha\ (\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) + (\alpha \,.\, \gamma)$$

3. RESTA O DIFERENCIA

8 - 4= 4 ← diferencia o resta

sustraendo

minuendo

La sustracción o resta de dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo.

Propiedades de la resta o diferencia:

1.- La resta no es asociativa, es decir, que el resultado varía de acuerdo a como se asocien los términos. Por ejemplo:

$$10 - (4 - 1) = 7 \text{ no es igual a } (10 - 4) - 1 = 5$$

2.- La resta no es conmutativa. Por ejemplo:

6 - 4 está definida en el conjunto de los naturales pero 4 – 6 no está definida en N

3.- La multiplicación es distributiva con respecto a la diferencia.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha\,(\beta - \gamma) = (\alpha\,.\,\beta) - (\alpha\,.\,\gamma)$$

4. DIVISION O COCIENTE

Dividendo → **19** |**2** ← Divisor

Resto → **1** **= 9** ← Cociente

En la división se verifica que:

DIVIDENDO = DIVISOR . COCIENTE + RESTO

Para que la división sea exacta el dividendo debe ser múltiplo del divisor.

5. POTENCIACION

Exponente

Base → $\mathbf{2^{3} = 2.2.2 = 8}$ ← Potencia

La potenciación es un caso particular de producto: todos los factores son iguales

En general, la n-ésima potencia puede expresarse simbólicamente como:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\,.\,\alpha\,.\,\alpha\,....\,\alpha}_{\text{n veces}}$$

La base es el número que se multiplica y el exponente indica las veces que se multiplica la base

α^n se lee alfa elevado a la ene

4^3 se lee cuatro a la tercera potencia o cuatro al cubo

Propiedades de la potenciación:

1.- La potenciación **no es conmutativa**, por ejemplo:

5^2 no es igual a 2^5

2.- La potenciación **no es distributiva con respecto a la suma y a la diferencia**, por ejemplo:

$(2 + 3)^2 = 25$ es distinto a $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

3.- La potenciación **es distributiva con respecto al producto y al cociente**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : (\alpha \,.\, \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \,.\, \beta^{\gamma}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : (\alpha : \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} / \beta^{\gamma}$$

4.- **Producto de potencias de igual base**: el producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias dadas.

En símbolos:

$$\alpha^{n} \,.\, \alpha^{m} = \alpha^{m+n}$$

$$6^3 \,.\, 6^2 = 6^{3+2} = 6^5$$

5. **Cociente de potencias de igual base**: el cociente de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la diferencia entre los exponentes de las potencias dadas

En símbolos:

$$\alpha^{n} : \alpha^{m} = \alpha^{m-n}$$

$$3^{4} : 3^{2} = 3^{4-2} = 3^{2}$$

6. **Potencias de potencia**: la potencia de otra potencia es una potencia de la misma base cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados

$$(\alpha^{n})^{m} = \alpha^{n\,.\,m}$$

$$(4^2)^3 = (4)^6$$

Exponente cero

El exponente cero aparece cuando se dividen dos potencias iguales:

$$2^4 : 2^4 = 2^{4-4} = 2^0$$

Pero, en este caso estamos dividiendo un número por sí mismo

$$2^4 : 2^4 = 1$$

Luego:

$$2^0 = 1$$

Todo número natural distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1

6. RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

Indice

$$\sqrt[3]{8} = 2 \leftarrow \text{Raíz}$$

Radicando

n general, la raíz enésima de un natural en lenguaje simbólico es:

$$\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$$

Propiedades de la radicación:

1.- La radicación **no es conmutativa**, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8} \text{ no es igual a } \sqrt[8]{3}$$

2.- La radicación no es distributiva con respecto a la suma y a la diferencia, por ejemplo:

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1 \text{ no es igual a } \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

3.- La radicación **es distributiva con respecto al producto y al cociente**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N: \sqrt[\gamma]{\alpha \,.\, \beta} = \sqrt[\gamma]{\alpha} \,.\, \sqrt[\gamma]{\beta}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N: \sqrt[\gamma]{\alpha : \beta} = \sqrt[\gamma]{\alpha} / \sqrt[\gamma]{\beta}$$

4.- La potencia de una raíz es igual a la raíz de la potencia del radicando.

$$\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^m = \sqrt[p]{\alpha^m}$$

$$\left(\sqrt[4]{24}\right)^3 = \sqrt[4]{24^3}$$

5.- La radicación de una raíz es igual a una raíz cuyo índice es igual al producto de los índices.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\alpha}} = \sqrt[p.q]{\alpha} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\alpha}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$$

6.- Si el índice y el exponente del radicando de una raíz se multiplican o dividen por un mismo número, la raíz no varía.

$$\sqrt[p]{\alpha^q} = \sqrt[p.n]{\alpha^{q.n}} = \sqrt[p:n]{\alpha^{q:n}}$$

$$\sqrt[3]{32^4} = \sqrt[3.2]{32^{4.2}} = \sqrt[3:2]{32^{4:2}}$$

Números Enteros

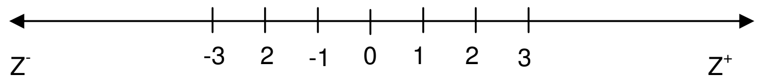
La sustracción o resta de dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo. Para resolver el caso contrario, surgió el conjunto de los números enteros que se denota con Z. Este conjunto está formado por el conjunto de números naturales (o enteros positivos), el cero, y el conjunto de los enteros negativos, simbólicamente:

$$Z = N \cup \{0\} \cup Z^-$$

El conjunto de NUMEROS ENTEROS posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Cada número entero tiene un único antecesor y un único sucesor.
- Es un conjunto discreto, es decir entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros.
- Cada número entero tiene opuesto (el opuesto de α es $-\alpha$ y el opuesto de $-\alpha$ es α)

Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:



Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero α, se indica como $|\alpha|$, es por definición igual a α si α es un número entero positivo o cero, e igual al opuesto de α si α es un número negativo. Simbólicamente:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Puede decirse también que el valor absoluto o módulo de un número entero α es la distancia al cero, **la distancia es un número positivo.** Por ejemplo,

$$|6| = 6; |-4| = 4$$

Orden en el conjunto de números enteros

En la recta numérica, la flecha indica el orden creciente en valor absoluto. Puede afirmarse que:

- ✓ Dados dos números positivos, es mayor el de mayor valor
- ✓ **Dados dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto**
- ✓ Todo número positivo es mayor que cero
- ✓ Todo número negativo es menor que cero

Puede observarse en la recta numérica que, por ejemplo, 3 >0; 2 < 3; -5 < -1; -3 < 1, etc.

Operaciones en el conjunto de Números Enteros

Dada la correspondencia entre los números naturales y los números positivos las operaciones en Z verifican las mismas propiedades que en N y además deben ampliarse.

1. SUMA O ADICIÓN

En la suma de números enteros se pueden presentar los siguientes casos:

a) Suma de números enteros del mismo signo

La suma de dos números enteros del mismo signo es otro número entero tal que su signo es igual al de los sumandos y su valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Por ejemplo:

(+2)+(+3)= 2+3=5 (-4)+(-5)= - 9

b) Suma de números enteros de distinto signo

La suma de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que su signo es igual al del número de mayor valor absoluto y su valor absoluto es igual a la diferencia de los valores absolutos de los sumandos.

Por ejemplo:

(+10)+(-3)= +7 (4)+(-9)= - 5

2. MULTIPLICACION O PRODUCTO

En el producto de números enteros se pueden presentar los siguientes casos:

a) Producto de números enteros del mismo signo

El producto de dos números enteros del mismo signo es otro número entero tal que su signo es positivo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+2).(+3)= +6 (-4).(-5)= +20

b) Producto de números enteros de distinto signo

El producto de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que su signo es negativo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+10).(-3)= - 30 (4).(-9)= - 36

c) Producto de varios números enteros

El producto de varios factores distintos de cero es otro número entero tal que su signo es positivo si el número de factores negativos es par y negativo si el número de factores negativos es impar y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+1).(-3).(-2) = +6 (2 factores negativos) (4).(-2) (-2)(-3)= - 48

En la Tabla 1 se presentan, simbólicamente, las propiedades de la suma y del producto.

Tabla 1. Propiedades de la suma y el producto

Propiedad	Suma	Producto
Clausura	$\forall \alpha, \beta \in Z : \alpha + \beta \in Z$	$\forall \alpha, \beta \in Z : \alpha \,.\, \beta \in Z$
Conmutatividad	$\forall \alpha, \beta \in Z : (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha)$	$\forall \alpha, \beta \in Z : (\alpha \,.\, \beta) = (\beta \,.\, \alpha)$
Asociatividad	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha\ (\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta)\ \gamma$
Distributividad	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha\ (\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) + (\alpha \,.\, \gamma)$	
Existencia de elemento neutro	$\forall \alpha \in Z : (\alpha + 0) = (0 + \alpha) = \alpha$	$\forall \alpha \in Z : (\alpha \,.\, 1) = (1 \,.\, \alpha) = \alpha$
Existencia de opuesto	$\forall \alpha \in Z, \exists -\alpha \in Z / \alpha + (-\alpha) = 0$	

3. RESTA

La diferencia de dos números enteros puede definirse como la suma del primero más el opuesto del segundo, simbólicamente:

$$\alpha, \beta \in Z : \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Por ejemplo:

(+10)-(-3)= (+10) +[-(-3)]= (+10)+(+3)=13

(-2)-(+9)= (-2) + (-9)= -11

4. DIVISION

La división exacta de dos números enteros, es decir que el resto sea igual a cero, no siempre es posible, es necesario que el dividendo sea múltiplo del divisor.

División exacta de números enteros

Si se da este caso, entonces el resultado es otro número entero tal que su signo es positivo si los números tiene el mismo signo, es negativo si los números tienen distinto signo y el valor absoluto es el cociente de los valores absolutos de los números dados.

Por ejemplo:

(+64):(+8)= (+8) (-24):(+6)= - 4

5. POTENCIACION

La definición de n-ésima potencia dada para los números naturales es válida para los enteros, así como también las potencias con exponente 0 y 1. En lenguaje simbólico:

$$\forall \alpha \in Z \wedge n \in N : \alpha^n = \underbrace{\alpha.\alpha.\alpha \ldots \alpha}_{\text{n veces}}$$

$$\forall \alpha \in Z - \{0\} : \alpha^0 = 1$$

$$\forall \alpha \in Z : \alpha^1 = \alpha$$

La potencia de un número entero es negativa cuando la base es negativa y el exponente impar, en el resto de los casos es positiva.

Por ejemplo:

$(-2)^3 = -8$ $(-2)^4 = 16$

La potenciación de números enteros cumple las mismas propiedades que la potenciación de números naturales.

6. RADICACION

La definición de raíz n-ésima dada para los números naturales es válida para los enteros.

$$\alpha \in Z \text{ y } n \in N, \text{siendo } n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$$

Si el índice de la raíz es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.

Si el índice es par y el radicando es positivo, las raíces son dos números opuestos.

Si el índice es par y el radicando es negativo, la raíz no tiene solución en Z.

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{+27} = +3 \text{ puesto que } (+3)^3 = 27$$

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2 \text{ puesto que } (+2)^4 = +16 \text{ y } (-2)^4 = +16$$

La radicación cumple con las propiedades de la radicación de números naturales y puede mencionarse otra propiedad:

Si el índice y el exponente del radicando son iguales:

a) *la raíz es igual a la base de la potencia cuando el exponente es impar*

b) *la raíz es igual al valor absoluto de la base de la potencia cuando el exponente es par.*

Por ejemplo:

$\sqrt[3]{(2)^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = +4$

Números Racionales

En el conjunto de los números enteros, si el dividendo no es múltiplo del divisor, la división no puede realizarse. Para solucionar este problema surge el conjunto de los números racionales que se simboliza con Q.

Dados $\alpha, \beta \in Z$, $\beta \neq 0$, se denomina número racional a la fracción $\frac{\alpha}{\beta}$

$\alpha \leftarrow$ numerador

$\beta \leftarrow$ denominador

<u>Clasificación de fracciones</u>

1.- Son *fracciones equivalentes* las que representan el mismo punto en la recta numérica y resultan de multiplicar numerador y denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\frac{1}{3}; \frac{2}{6}; \frac{3}{9}$.

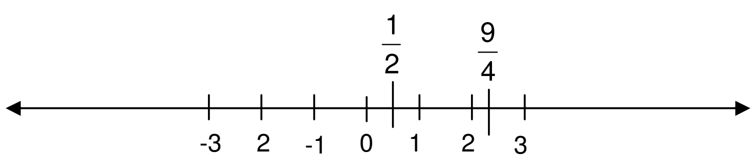
2.- Son *fracciones irreductibles* aquellas cuyo numerador y denominador son números coprimos, es decir no tienen divisores comunes. Por ejemplo: $\frac{2}{7}; \frac{8}{9}; \frac{3}{11}$.

3.- Son *fracciones aparentes* aquellas cuyo numerador es múltiplo del denominador. Son números enteros. $\frac{4}{2}; \frac{12}{4}; \frac{9}{3}$

El conjunto de NUMEROS RACIONALES posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Es un conjunto denso, es decir entre dos números racionales existe un conjunto infinito de números racionales.
- Es un conjunto ordenado.

Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:



<u>Orden en el conjunto de números racionales</u>

Para comparar dos números racionales $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$ se debe considerar lo siguiente:

- $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta < \beta.\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta = \beta.\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta > \beta.\gamma$

Operaciones en el conjunto de Números Racionales

Las cuatro operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división) tienen solución en Q, es decir son operaciones cerradas.

1.- SUMA O RESTA

Para sumar o restar fracciones es necesario que tengan el mismo denominador.

Para reducir fracciones a común denominador:

- se determina el máximo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de las fracciones.
- Se calculan las fracciones equivalentes de cada término con ese denominador

En símbolos, $\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\delta \pm \beta.\gamma}{\beta.\delta}$

Por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1.3 + 2.2}{2.3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$

2.- PRODUCTO

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de los factores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de los factores.

En símbolos: $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$

Por ejemplo: $\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1.2}{2.3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3.- DIVISION

El cociente entre dos fracciones es igual al producto entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}.\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\delta}{\gamma} \text{ con } \beta, \gamma \neq 0$$

<u>Inverso multiplicativo</u>

Dada una fracción $\frac{\gamma}{\delta}$, su inverso multiplicativo $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}$ es otra fracción tal que multiplicada por la primera da por resultado 1. El resultado de $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}$ es $\frac{\delta}{\gamma}$.

Si por ejemplo se tiene que dividir $\frac{4}{5}$ entre $\frac{2}{3}$:

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}.\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{4}{5}.\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

4. POTENCIACION

Se consideran dos casos:

a) Potencia de exponente natural

Para elevar una fracción a la n-ésima potencia se eleva numerador y denominador a la n, en símbolos:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}=\frac{\alpha^{n}}{\beta^{n}}$$

b) Potencia de exponente negativo

Una fracción de exponente negativo se puede transformar en una potencia tal que la base es la inversa de la base de la potencia dada y el exponente es positivo y de igual valor absoluto que el exponente de la potencia dada. Simbólicamente:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n} \text{ con } \alpha \neq 0$$

c) **Potencia de exponente racional**

La potencia $\frac{p}{q}$ *de una fracción se obtiene calculando la raíz q-ésima de la potencia p-ésima del número.* En símbolos: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p}}$

Se cumplen las mismas propiedades que la potenciación de números naturales y enteros.

5. RADICACION

Simbólicamente:

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n}=\frac{\alpha}{\beta}$$

La regla de los signos es la misma que la enunciada para la radicación de números enteros.

Estas operaciones verifican las propiedades descriptas para números naturales y enteros. Se debe tomar en cuanta que el denominador debe ser distinto de cero.

Notación científica

La notación científica es una forma de expresión que permite operar fácilmente con números muy grandes o muy pequeños puesto que simplifica el modo de representarlo. El número en esta notación se expresa como el producto de un número cuyo valor absoluto sea mayor o igual que 1 y menor que 10 y una potencia de base 10 cuyo exponente indica la cantidad de ceros a la izquierda (si el exponente es negativo) o a la derecha (si el exponente es positivo) de la coma decimal. Prácticamente, si la coma se corre a la izquierda, la potencia en base 10 será positiva, y el exponente indica, como se mencionó anteriormente, la cantidad de ceros a la derecha de la coma decimal; y si si la coma se corre a la derecha, la potencia en base 10 será negativa.

Por ejemplo:

2.000.000 se puede expresar como 2.10^6

0,000000012 se puede expresar como $1{,}2.10^{-8}$

Números Irracionales

Los números irracionales se denominan así por la imposibilidad de expresarlos como una fracción.

Un número es irracional si su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Dos ejemplos muy conocidos son: $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ y $\pi = 3{,}141592654...$

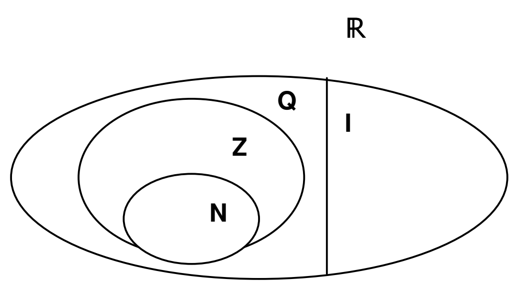
El conjunto de números irracionales se denota con I.

La representación gráfica de estos números completa la recta numérica.

Números Reales

La unión del conjunto de números irracionales, I, con el conjunto de los racionales Q da como resultado un nuevo conjunto que es el de los números reales. Este se denota con R.

Se tiene entonces: $\mathbb{R} = Q \cup I$ y además $N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$. Esquemáticamente:



El conjunto de NUMEROS REALES posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Es un conjunto denso, es decir entre dos números reales existe un conjunto infinito de números reales.
- Es un conjunto ordenado.

Este conjunto ocupa toda la **recta numérica**.

En el conjunto de NUMEROS REALES las operaciones suma, resta, multiplicación, división, cumplen con las propiedades de **clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad (de suma o resta respecto del producto o cociente), existencia de**

elemento neutro, existencia de opuesto. Potenciación y radicación verifican todas las propiedades detalladas para todos los conjuntos numéricos incluidas en este conjunto infinito de números reales.

Trabajo Práctico N°1

Conjuntos numéricos

Números naturales

1. Complete las siguientes tablas aplicando propiedades de:

a) la suma

			Asociatividad		Conmutatividad	
a	b	c	(a+b)+c	= a+(b+c)	a + b =	b+a
4	15	2				
1	0	28				
11	5	6				

b) del producto

			Asociatividad		Conmutatividad	
a	b	c	(ab)c	= a(bc)	ab =	ba
1	2	3				
4	8	1				
5	8	9				

2. Calcule el resultado de las siguientes expresiones combinadas

a) $3 + 5 \cdot (4 - 3)$

b) $3 \cdot (4 + 2) - 3$

c) $3 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (2 + 3)$

d) $12 - (3 + 4 \cdot 2 - 1) + 4$

e) $18 - 4 \cdot (4 \cdot 2 - 6) + 15 : 3$

f) $5 \cdot (7 - 3 \cdot 2) - 12 : 4$

g) $8: (2 \cdot 4) + 6 : (3 \cdot 2)$

h) $4 \cdot 6 : 3 - (10 - 12 : 2 + 1)$

3. Calcule las siguientes potencias:

a) 2^5; b) 4^3; c) 5^0; d) 12^2; e) 9^3

4. Aplicando las propiedades de potencias de igual base resuelva:

a) $\dfrac{\alpha^2\alpha^8}{\alpha^3\alpha}$; b) $\dfrac{\alpha^3\alpha^1\beta^5}{\alpha^2\beta^3}$

5. Calcule las siguientes raíces:

a) $\sqrt{4}$; b) $\sqrt[3]{27}$; c) $\sqrt[4]{16}$; d) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2$; e) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$

Números enteros

6. Coloque el signo que corresponda: mayor, menor o igual.

a) -3 ... -12 b) $|-2| \ldots -2$ c) 0 ... 5 d) 6 .... 5 e) $-(-5) \ldots |-5|$ f) 0 ...-3

7. Indique que propiedades se cumplen para la suma y el producto en Z

8. Calcule las siguientes:

a) sumas:

i) (-9) + (+12) + (+8) + (-21)+ (-1)

ii) (+10) + (-4) + (+11) + (-2)

b) diferencias:

i) (+24) – (+15)

ii) (+12) – (+32)

c) productos

i) (-10) . (+.2) . (+4)

ii) (-11) . (+3). (-2) . (+6) . (+4)

c) cocientes

i) (-32) : (-8)

ii) (+30) : (-6)

9. Realice las siguientes operaciones:

a) {(+15) - [(+4) - (-6) + (+3)]}

b) (-14) + (-6) + [(-8) - (-2) + (-1) - (+4)]

c) – [(-7) + (-2)] + [(-9) – (-2) – (-1)] - (+30)

d) – {(-6) + [(-2) – (-10)] + [(-1)-(+2)]} + (+12)

10. Resuelva las siguientes operaciones combinadas

a) (-10 – 8) : (-9) + (- 3).(-4)

b) [(+10). (-3) – (-2). (+3)]: (- 4 + 1)

c) {18 - [3 + 18 : (3 · 2)]} : (9 - 3)

d) 12 - [(3 · 4 + 2) - (9 - 2 · 3)]

11. Resuelva aplicando las propiedades convenientes de la potenciación:

a) $(-3)^3 . (-2) . (-4)^0$

b) {[(-2)2]3}4

c) $[(-3) . 2(-5)]^3$

d) $[2 . (-2) +(-4)^2]^3$

e) $[(-4)^8 : (-2)^2] . (-3)^3$

12. Resuelva aplicando las propiedades convenientes de la radicación:

a) $\sqrt{25.36.64}$

b) $\sqrt[3]{8.27.64}$

c) $\sqrt[5]{-32}.(-2+4):(-2)^2$

d) $(-6+2)^3 : 2-\sqrt[3]{64}.(-2)^0$

Números racionales

13. Calcule la fracción irreducible equivalente a cada una de las dadas.

a) $\frac{30}{15}$ b) $\frac{42}{49}$ c) $-\frac{24}{54}$ d) $\frac{81}{45}$

14. Escriba fracciones equivalentes a las indicadas que tengan el mismo denominador.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{8}$

15. Escriba mayor, menor o igual, según corresponda:

a) $\frac{1}{5}\cdots\frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{10}\cdots\frac{7}{49}$ c) $\frac{14}{25}\cdots-\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{81}\cdots\frac{2}{3}$

16. Encuentre el resultado de:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{3}+\frac{7}{8}+\frac{3}{9}$ d) $\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{5}{4}$

17. Determine el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{4}{3}:\frac{1}{8}\right).\left(\frac{8}{20}:\frac{10}{2}\right)$ b) $\left(\frac{5}{21}:\frac{3}{25}\right).\left(\frac{8}{20}:\frac{10}{2}\right)$ c) $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)$

18. Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\left[\left(2-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{4}:\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right].\frac{1}{9}$

c) $\dfrac{\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{10}\right).\left(-\frac{3}{2}\right):\frac{4}{3}}{-3+\frac{1}{8}}:\frac{2}{9}$

b) $\left[\left(\frac{3}{4}-3\right)+\frac{1}{9}:3\right]:\left(-\frac{3}{2}+5-\frac{7}{6}\right)$

d) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}:5\right)+\left(-\frac{6}{7}\right)}{-\frac{3}{4}:\frac{5}{8}-\frac{2}{9}}+4$

19. Calcule las siguientes:

a) potencias

i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ ii) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$ iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ iv) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) raíces

ii) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$ ii) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$ iii) $\sqrt{-\frac{1}{36}}$ iv) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

20. Efectúe las siguientes operaciones combinadas:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}.\left(-\frac{5}{8}\right):\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{9}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{4}{7}\right)}$

c) $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{64}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\sqrt{1-\frac{7}{16}}.(-2)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}:\frac{3}{2}$

20. Indique que propiedades se cumplen para la suma y el producto en Q y en R

21. Exprese en notación científica las siguientes cantidades:

a) 300 000 000

b) -7894,34

c) 0,000 000 1

d) 456,987

e) 0,000 000 62

f) 0, 000 000 9

g) -18 400 000 000

h) 0, 000000000 93

i) 0, 00120

j)5480000

Problemas de aplicación

I) Un camión transporta 5000 L de leche para suministrar a tres fábricas de productos lácteos. En la primera descarga 1500 L, y en la segunda, 865 L. Después de abastecer a la tercera fábrica, todavía quedan 1975 en la cisterna del camión; ¿con cuántos litros se ha aprovisionado a esta última?

II) En una panadería se dispone de 40 docenas de huevos para hacer 50 bizcochuelos y con los huevos que sobren, algunas galletas. Por cada bizcochuelo se emplean 6 huevos, y por cada docena de galletas, 4 huevos. ¿Cuántas galletas podrán hacerse?

III) En una granja avícola se han recogido 6500 huevos. En el control de calidad se retiran 260,

Con el resto se preparan 120 cajas de dos docenas y los demás se reparten en cajas de una docena. ¿Cuántas cajas de una docena se preparan en total?

IV) En un vivero se quieren plantar 529 cipreses en hileras, formando un cuadrado. ¿Cuántos cipreses hay que plantar en cada hilera?

V) El presupuesto de un país es de quince billones de dólares., ¿cuánto tiene que aportar cada individuo en promedio si el país tiene doscientos cincuenta millones de habitantes?

VI) Si la distancia Tierra- Luna es 384 000 km y desde la Tierra al Sol es 150 000 000 km. ¿Cuántas veces está la Tierra más lejos del Sol que de la Luna?

VII) En cierto cultivo se tenían 200 protozoarios que se duplicaban por bipartición cada día. Si en este momento se cuentan 236000 protozoarios ¿cuántos días transcurrieron desde que se inició el cultivo?

VIII) Se tiene un campo de 12 ha por 4 ha. Se quiere arar los dos tercios del campo ¿Cuántas ha quedarán sin arar?

IX) La compra de reactivos de un laboratorio de análisis de suelos costó $ 4500.- Si un quinto del total corresponde a solventes orgánicos, dos tercios a reactivos sólidos y el resto a reactivos líquidos ¿Cuál es el monto en pesos de cada uno de estos insumos?

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Razones y proporciones

Se denomina **razón** entre dos números a y b (b ≠ 0), al cociente de la división de a por b. El primer número se denomina *antecedente* y el segundo *consecuente*. En símbolos:

$$a : b \text{ o bien } \frac{a}{b}$$

Por ejemplo, el porcentaje es una razón entre un número y 100, la densidad de una sustancia es la razón entre la masa y el volumen de dicha sustancia, el número de moles de un compuesto químico es una razón entre la masa y su peso molecular.

Se denomina **proporción** a la igualdad de dos razones. Dados cuatro números a, b, c, d, distintos de cero, en ese orden, forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón de los dos últimos. En símbolos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \ \textbf{a} \text{ es a } \textbf{b} \text{ como } \textbf{c} \text{ es a } \textbf{d}$$

Se denominan *extremos* de la proporción a **a** y **d**, **b** y **c** se llaman *medios*.

Las proporciones cuyos medios son iguales se llaman <u>proporciones contínuas</u>, por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{16} \qquad\qquad \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

<u>Propiedades de las proporciones</u>

1. Propiedad fundamental: en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \,.\, d = c \,.\, b$$

En el ejemplo anterior $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, 1 . 16= 4 . 4, 16 = 16

2. En toda proporción la suma o resta de antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como las suma o resta de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

3. En toda proporción la suma o resta de antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente como las suma o resta de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$$

4. En toda proporción la suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a la diferencia de su antecedente y consecuente como las suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a la diferencia de su antecedente y consecuente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

Cálculo de un elemento de una proporción

Para calcular un elemento de una proporción es suficiente aplicar la propiedad fundamental. Considerando que se desea calcular un extremo, simbólicamente:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\Rightarrow a\,.\,x=c\,.\,b,\ x=\frac{b\,.\,c}{a}$$

Magnitudes proporcionales

Magnitud es toda propiedad que se puede medir, por ejemplo el tiempo, el peso, la superficie, el volumen, la longitud, etc.

Las magnitudes pueden ser **directa** o **inversamente** proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes x y y, son directamente proporcionales cuando están relacionadas por la *función* **y = k . x**, siendo k un número distinto de cero que se denomina constante, factor o coeficiente de proporcionalidad. El cociente entre pares de cantidades correspondientes es siempre el mismo, es constante, $\frac{y}{x}=k$

Propiedades

1. Dadas las magnitudes directamente proporcionales, si se multiplica una cantidad de la primera por un número, la cantidad correspondiente a la segunda magnitud queda multiplicada por el mismo número (es decir si aumenta o disminuye la cantidad de una de las magnitudes, la cantidad correspondiente a la otra magnitud aumenta o disminuye en la misma proporción).

Dadas las cantidades de las magnitudes x_1, y_1, si x_1 aumenta n veces, entonces y_1 aumenta n veces también, simbólicamente: $x_2=n.x_1\Rightarrow y_2=n.y_1$.

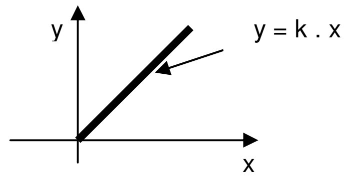
2. Si dos magnitudes son directamente proporcionales, a la suma de de dos cantidades de la primera le corresponde la suma de las dos cantidades de la segunda magnitud. Es decir,

$x_3=x_1+x_2\Rightarrow y_3=y_1+y_2$.

3. Si dos magnitudes son directamente proporcionales, la razón entre dos cantidades de la primera es igual a la razón entre las cantidades correspondientes de la segunda. En lenguaje simbólico: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

Representación gráfica de una función de proporcionalidad directa

La función y = k . x se representa mediante una recta que pasa por el origen de coordenadas.



Por ejemplo, la tabla que sigue representa la cantidad de conservador en kg que se agrega a distintas cantidades de un producto alimenticio.

Producto (tn)	20	30	40	50
Conservador (kg)	2	3	4	5

El cociente entre el conservador y la masa de producto elaborado es siempre 0,1, por lo tanto las magnitudes son directamente proporcionales. Si x es la masa del producto y y la del conservador, y= k .x, para la primera columna numérica: 2= k. 20 $\Rightarrow$ k= 2/20=0,1, es decir la constante de proporcionalidad es 0,1. La fórmula es y = 0,1. x. Se puede observar que si se duplica la cantidad de producto se duplica la cantidad de conservador que se debe agregar.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes x y y, son inversamente proporcionales cuando están relacionadas por la *función* $y = \frac{k}{x}$, siendo k un número distinto de cero que se denomina constante, factor o coeficiente de proporcionalidad. El producto entre pares de cantidades correspondientes es siempre el mismo, es constante, **y . x= k.**

Propiedades

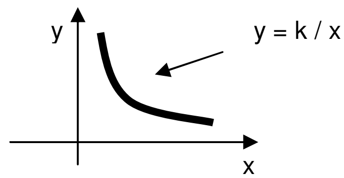
1. Dadas las magnitudes inversamente proporcionales, si se multiplica una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente queda dividida por el mismo número (es decir si aumenta o disminuye la cantidad de una de las magnitudes, la cantidad correspondiente a la otra magnitud disminuye o aumenta en la misma proporción).

Dadas las cantidades de las magnitudes x_1, y_1, si x_1 aumenta n veces, entonces y_1 dismiunuye n veces también, simbólicamente: $x_2 = n.x_1 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{n}.y_1$.

2. Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, la razón entre dos cantidades de la primera es igual a la razón inversa entre las cantidades correspondientes a la segunda. En lenguaje simbólico: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa

La función $y = \frac{k}{x}$ se representa mediante una hipérbola equilátera.



Por ejemplo, la tabla que sigue representa la viscosidad de una sustancia en función de la temperatura.

Temperatura (ºC)	20	40	60	80
Viscosidad (Pa.s)	1,8	0,9	0,6	0,45

El producto entre la viscosidad y la temperatura es siempre 36, por lo tanto las magnitudes son inversamente proporcionales. Si x es la temperatura y y la viscosidad, y= k / x, para la primera columna numérica: 1,8= k / 20 $\Rightarrow$ k= 1,8 . 20=36, es decir la constante de proporcionalidad es 36. La fórmula de la función de proporcionalidad inversa en este caso es: y= 36 / x

Problemas de regla de tres

Son problemas en los que se involucran magnitudes proporcionales en los que conocido un par de elementos correspondientes y otro de una de las magnitudes, se debe calcular el elemento que le corresponde en la otra magnitud.

Si interviene sólo dos magnitudes, la regla de tres es **simple**.

Si las magnitudes son directamente proporcionales, la regla de tres es **directa** y si son inversamente proporcionales la regla es **inversa**.

Para resolver este tipo de problemas se utilizan las definiciones y propiedades de las magnitudes proporcionales.

Trabajo Práctico N° 2
Magnitudes proporcionales

Razones y proporciones

1. Exprese en forma de razón las siguientes expresiones:

a) la densidad demográfica de una ciudad es 6 habitantes por cada 2 m^2

b) se utiliza 1 kg de fertilizante por cada 10 m^2

c) 7,8 g de etanol absoluto tiene un volumen de 10 cm^3

2. Calcule la razón entre los siguientes pares de números:

a) 9 y 18 b) 6 y -24 c) $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{4}$ d) 1,2 y - 3,6

3. Escriba cuatro razones iguales a cada una de las siguientes:

a) $\frac{3}{4}$ b) -0,4 c) – 4

4. Calcule el extremo desconocido de las proporciones:

a) $\frac{x}{3} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{9}}$ b) $\frac{12}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{2}{24}}{x}$ c) $\frac{0,4}{x} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{28}{3}}$ d) $\frac{2+\frac{1}{3}}{x} = \frac{4+\frac{1}{4}}{\left(3-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$

5. Aplicando las propiedades correspondientes, calcule los elementos desconocidos en las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{8} = \frac{m}{n}$ siendo m + n = 36

b) $\frac{a}{b} = \frac{12}{5}$ siendo a + b = 49

c) $\frac{18}{b} = \frac{30}{d}$ siendo b + d = 36

d) $\frac{2,4}{1,2} = \frac{m}{n}$ siendo m - n = 6

6. Las tablas que siguen representan a magnitudes directamente proporcionales. Calcule los elementos que faltan. Represente gráficamente

a)

x	8	4		12
y	24		48	

b)

x	120	60		15
y	200		50	

7. Considere los valores del ejercicio 6. a) y encuentre gráficamente el valor de k. ¿Cuál es el valor de y si x = 5 y si x = 10?

8. Las tablas que siguen representan a magnitudes inversamente proporcionales. Calcule los elementos que faltan. Represente gráficamente.

a)

x	4		6	
y	9	3		2

b)

x	10	60		8
y	48		12	

9. Considere los valores del ejercicio 8. a) ¿Cuál es el valor de y si x = 5 y si x = 2?

Problemas de aplicación

I) Si la inversión en una fábrica de embutidos aumentó en un 25 % del 2005 al 2008, indique cuál era el monto de la inversión durante el año 2005 si el año pasado se invirtieron $ 250.000.

II) Si una fábrica de helados aumentó su producción de 64 tn a 75 tn; ¿en qué porcentaje se incrementó su producción?

III) Una cooperativa posee un campo de 300 ha en el que se ha sembrado un 36 % de la superficie con maíz, 12 % con soja y el resto con alfalfa. ¿Cuántas hectáreas corresponden a cada vegetal sembrado?

IV) Si 9,2 N de una sustancia ocupan un volumen de 100 cm^3, indique el peso específico de la sustancia.

V) Si se utilizan 14 g de sodio en una determinación química, calcule el número de moles empleados. Considere que el peso molecular del sodio es 23 g/mol.

VI) La razón entre la cantidad de fertilizante que se agrega en dos campos diferentes es 5/2. Si entre ambos suman 2,5 tn, ¿cuántas tn más se utilizan en el primer campo?

VII) El número de animales de un ganadero es 4500. Si la proporción de terneros a adultos es ¼; ¿cuántos terneros posee?

VIII) Para la elaboración de 100 kg una mermelada se necesitan 50 kg de fruta y 60 kg de azúcar. ¿Cuántos kg de cada ingrediente se necesitan para elaborar 500 kg?

IX) Para fabricar 1000 kg de hidróxido de sodio se necesitan 575 g de sodio. Si se desean preparar 1500 kg que cantidad de sodio se debe utilizar?

X) En una granja avícola los pollos consumen 4 tn de alimento balanceado por semana. ¿Cuántas tn de alimento consumen mensualmente?

XI) Una enlatadora de tomates posee 3 líneas en paralelo que envasan la materia prima diaria en 12 h. Si una de las líneas queda fuera de servicio, determine el tiempo en que envasará la misma cantidad de materia prima.

XII) La inversión en agroquímicos es de $ 40000 para un área sembrada de 200 ha, si el área es 350, ¿cuánto se deberá invertir?

XIII) En una fábrica de jugos, una máquina tarda 180 horas en envasar toda la producción de un mes. Si se adquiere otra máquina que tardaría sola 120 horas en hacer el mismo trabajo, ¿cuánto tardarán las dos juntas? ¿Qué fracción de la producción conseguirán envasar entre las dos en 10 horas de funcionamiento?

UNIDAD 2

FUNCIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

SISTEMAS ELEMENTALES DE ECUACIONES LINEALES

FUNCIONES DE PRIMER GRADO. SISTEMAS ELEMENTALES DE ECUACIONES LINEALES

Función de primer grado

Una gran cantidad de relaciones que se utilizan en forma cotidiana involucran a dos o más variables de manera que el valor de una de ellas depende del valor de las otras. Por ejemplo, el volumen que ocupa un gas depende de la presión que soporta; la distancia recorrida por un auto depende de la velocidad; el sueldo que cobra una persona está en función de su trabajo, etc.

Si se consideran dos variables que están relacionadas de manera que a cada valor de una de ellas le corresponde un único valor de la otra, la relación que existe entre ellas se denomina **función**.

Una variable **y** se dice que es **función** de otra variable **x**, cuando a cada valor de **x** le corresponde **uno y sólo un valor** de **y**. En símbolos se escribe **y=f(x)** que se lee "y es igual a f de x o y es función de x". A **x** se la denomina **variable independiente** y a **y variable dependiente.** El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama conjunto de partida o dominio de la función D(f) y el conjunto de valores de y se designa como conjunto de llegada, codominio o imagen de la función Im(f).

Las funciones se designan con letras minúsculas f, g, h, etc. Simbólicamente, se escribe f: $x \to y$, se lee f aplica x en y o f transforma x en y. Si A es el conjunto de partida y B el de llegada se puede escribir f: $A \to B$. Si los conjuntos involucrados son numéricos las funciones se denominan funciones numéricas o escalares.

- ✓ La función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to ax + b$

donde a y b son constantes y pertenecientes al conjunto de los números reales R y con $a \neq 0$ se llama **función lineal** o **función de primer grado en la variable x**. Puede definirse como un conjunto de pares ordenados de la forma: $f = \{(x,y) \in R \times R / \ y = ax + b; \ a \wedge b \in R \ ; a \neq 0\}$

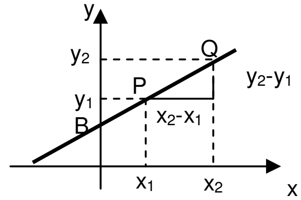
La función lineal puede representarse gráficamente en el plano real como una **línea recta**, la igualdad y = ax + b se denomina ecuación explícita de la recta.

$y = a\,x + b \leftarrow$ Parámetro de posición, u **ordenada al origen**

↑ Parámetro de dirección, coeficiente angular o **pendiente**

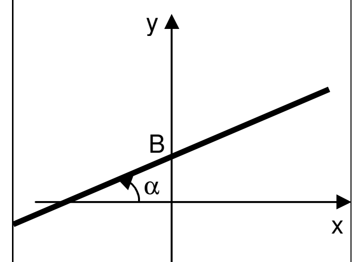
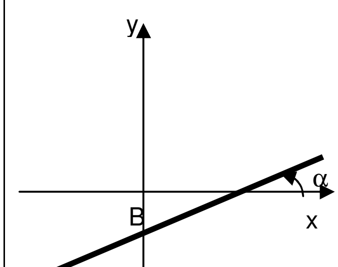
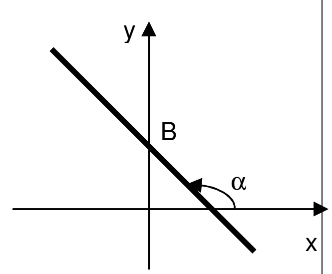
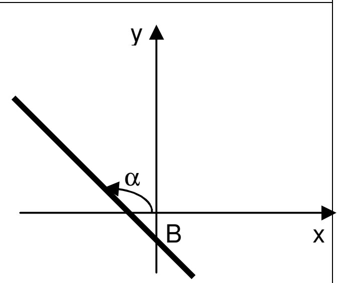
El parámetro **a** es la tangente trigonométrica del ángulo formado por la dirección positiva del eje $\overrightarrow{OX}$ y la recta, medido en sentido antihorario. La pendiente a representa el aumento o la disminución de la variable **y** por cada aumento de la variable **x** (el cambio en el eje y, Δy con respecto al cambio en el eje x, Δx. Por ejemplo, si $P = (x_1,y_1)$ y $Q = (x_2,y_2)$ son dos puntos de la recta que representa a la función lineal, la pendiente se puede calcular como:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



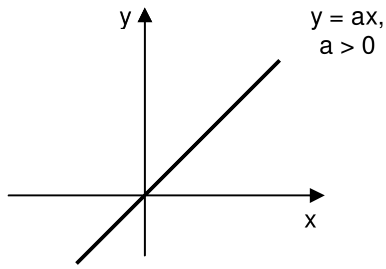
El parámetro **b** es tal que su valor absoluto es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de intersección de la recta con el eje $\overrightarrow{OY}$ que es el punto B de coordenadas (0,b). En la Tabla 2.1 se presentan distintos casos de la ecuación de la recta, considerando sus parámetros.

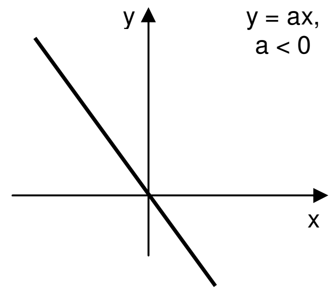
Tabla 2.1 Casos de la ecuación de la recta

Ecuación de la recta	**a= tg α**	**α**	$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	**b**	**Gráfico**
y = ax + b	tg α > 0	Ángulo agudo	a > 0 Δ y y Δ x son números positivos, la función es **creciente**	b > 0	
	tg α > 0	Ángulo agudo	a > 0 Δ y y Δ x son números positivos, la función es **creciente**	b < 0	
	tg α < 0	Ángulo obtuso	a < 0 Δ y y Δ x son números de distinto signo, la función es **decreciente**	b > 0	
	tg α < 0	Ángulo obtuso	a < 0 Δ y y Δ x son números de distinto signo, la función es **decreciente**	b < 0	

Casos particulares

a) Si b = 0, la ecuación se escribe y = ax, y representa a una recta que pasa por el origen de coordenadas.

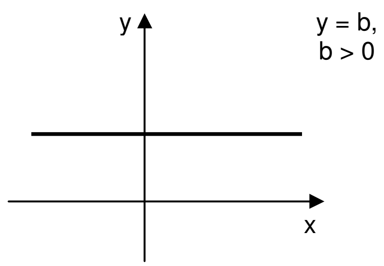


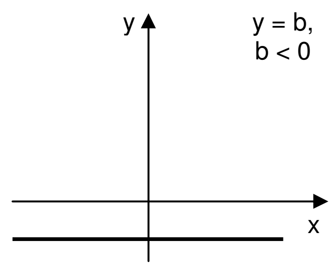


Como puede observarse D(f) = ℝ y Im(f)= ℝ.

En particular si a = 1, la ecuación se transforma en y = x, es la **función identidad** y su gráfica es la recta llamada 1º bisectriz o también recta de 45º.

b) Si a = 0 y b ≠ 0, la ecuación se escribe y = b. La función definida por esta ecuación se denomina **función constante** y su representación grafica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OX}$.





En estos casos D(f) = R y Im(f)= {b}.

c) Si a = 0 y b = 0, la ecuación se transforma en y = 0. La función definida por esta ecuación se denomina **función nula**, su gráfico es una recta que coincide con el eje $\overrightarrow{OX}$. En este caso D(f) = ℝ y Im(f)= {0}.

d) El conjunto f = {(x,y)∈ ℝ x ℝ/ x= c ∧ c∈ ℝ } que **NO REPRESENTA A UNA FUNCION**, es un conjunto de pares ordenados que se caracteriza por tener la primera componente igual a c y la segunda componente varía en el conjunto R. Su gráfica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OY}$, cuya ecuación es x = c, en este caso **NO TIENE PENDIENTE** puesto que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y la tg de $\frac{\pi}{2}$ **NO EXISTE.**

Es también una función de primer grado la definida como:

$$f= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / ax + by + c = 0;\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}\ ;\ a \wedge b \neq 0\}$$

la pendiente es $-\frac{a}{b}$ y la ordenada al origen $-\frac{c}{b}$

Ecuación de primer grado o lineal en una variable

Sea la función de primer grado definida por:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

si se hace y = 0, la ecuación anterior se expresa como:

$$ax + b = 0 \qquad (2)$$

A esta ecuación (2) se la denomina **ecuación de 1° grado en la variable x.** Como puede verse, el primer miembro de (2) es un polinomio en x, es decir P(x) = 0. Por lo tanto, *resolver una ecuación de 1º grado en la variable x consiste en encontrar los ceros de la función polinomial o las raíces de la ecuación polinómica.*

Como la ecuación es de primer grado con una incógnita, tiene una sola raíz, es decir **un único valor de x satisface la ecuación**. LA SOLUCIÓN ES UNICA.

Geométricamente hallar el valor de x de la ecuación (2) significa encontrar la abscisa del punto que tiene ordenada nula (y=0), es decir el punto de intersección de la gráfica de la función f con el eje $\overrightarrow{OX}$.

Por ejemplo, si se tiene la recta y= 3x + 1, el punto de intersección de ésta con el eje $\overrightarrow{OX}$ es:

$$3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Ecuación de primer grado en dos variables

Sea la función de primer grado definida por:

$$f=\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ ax + by + c = 0;\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}\ ; a \wedge b \neq 0\}$$

a la igualdad

$$ax + by + c = 0 \qquad (3)$$

se la denomina **ecuación de 1° grado con dos incógnitas x** y **y.**

Resolver una ecuación de 1º grado en la variable x consiste en encontrar pares ordenados (x,y) de números reales que verifiquen la ecuación. Los pares ordenados que cumplen con esta condición se llaman soluciones de la ecuación.

Como se expresó anteriormente, la ecuación ax + by + c = 0 con a y b distintos de cero es la expresión de una recta de pendiente $-\frac{a}{b}$ y ordenada al origen $-\frac{c}{b}$, entonces **cada punto de la recta es una solución** de la ecuación (3), por lo tanto esta ecuación tiene INFINITAS SOLUCIONES.

Por ejemplo, dada la ecuación x + 2y - 4 = 0, el conjunto de soluciones es:

$$S=\{(0,2);\ (1,3/2);\ (2,1);\ \ldots\}$$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

La expresión:

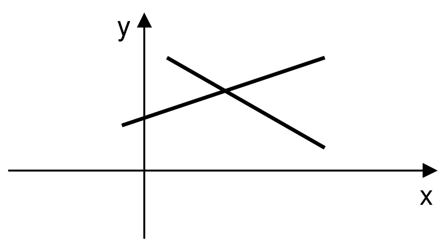
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 & a_1 \wedge b_1 \neq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 & a_2 \wedge b_2 \neq 0 \end{cases}$$

se llama **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

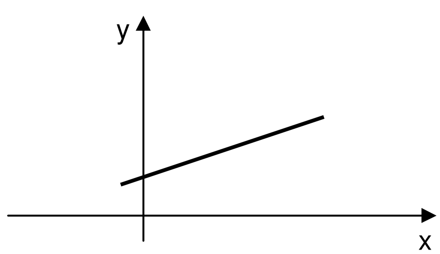
Resolver un sistema de este tipo consiste en encontrar todas las soluciones comunes a las dos ecuaciones, es decir determinar los puntos comunes a las rectas que ambas expresiones representan.

Pueden presentarse tres situaciones:

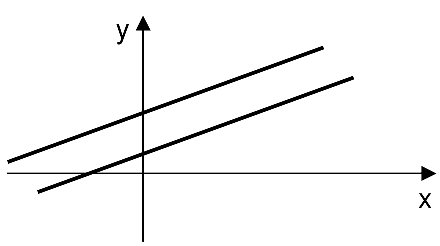
1) El sistema tiene una **única solución**, es decir existe un único par ordenado de números reales que satisface a ambas ecuaciones. Geométricamente las rectas tienen un único punto de intersección. El sistema se denomina COMPATIBLE DETERMINADO.



2) El sistema tiene **infinitas soluciones**, es decir existen infinitos pares ordenados de números reales que satisfacen a ambas ecuaciones. Geométricamente las rectas son coincidentes. El sistema se denomina COMPATIBLE INDETERMINADO.



3) El sistema **NO tiene solución**, es decir no existe un par ordenado de números reales que satisfaga a ambas ecuaciones. Geométricamente las rectas son paralelas. El sistema se denomina INCOMPATIBLE.



Métodos de resolución

Existen diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: método gráfico y métodos algebraicos: sustitución, igualación, reducción por sumas y restas, determinantes.

A continuación se desarrollan los procedimientos que se utilizan con mayor frecuencia.

Método gráfico

Este método consiste en graficar las rectas descriptas por las ecuaciones del sistema, la solución es el punto de intersección de ambas en el caso de que el sistema sea compatible, o bien las rectas son coincidentes si el sistema es compatible indeterminado y si el sistema es incompatible las rectas son paralelas. Los gráficos presentados en la página anterior esquematizan las tres situaciones mencionadas.

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones y reemplazarla en la otra ecuación.

Por ejemplo, sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

Se despeja **y** en la ecuación (2), es decir,

$$y = 4 - x \quad (3)$$

este valor se reemplaza en la ecuación (1),

$2x + (4 - x) = 1$

Se resuelve la ecuación resultante que posee una incógnita (x), x = -3.

Se reemplaza este valor en la ecuación (3), por lo tanto y = 7.

Método de determinantes

Antes de desarrollar el método, conviene recordar la definición de determinante. Dados 4 números a, b, c, y d, se denomina **determinante**, Δ, a la diferencia entre el producto de los números de la diagonal principal y el producto de los números de la otra diagonal. Esquemáticamente:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a.d - c.d$$

Aplicando determinantes, se puede encontrar el valor de cada incógnita mediante una fracción, que tiene como denominador al determinante de los coeficientes de las incógnitas (determinante del sistema) y por numerador al determinante que se obtiene al reemplazar en el anterior la columna de los coeficientes de la incógnita cuyo valor se desea calcular por los términos independientes.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde:

a_1 y a_2 son los coeficientes de x

b_1 y b_2 son los coeficientes de y

c_1 y c_2 son los términos independientes

El valor de las incógnitas x y y se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Llamando:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Se tiene, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

Además:

- ✓ Si **$\Delta \neq 0$** el sistema es **compatible determinado.**
- ✓ Si **$\Delta = 0$, $\Delta x = 0$** y **$\Delta y = 0$**, el sistema es **compatible indeterminado.**
- ✓ Si **$\Delta = 0$ y $\Delta x \neq 0$** ó **$\Delta y \neq 0$**, el sistema es **incompatible.**

Trabajo Práctico N° 3

Funciones de primer grado. Sistemas elementales de ecuaciones lineales

Funciones y ecuaciones de primer grado

1. Dadas las siguientes funciones lineales analice parámetros, grafique, indique dominio y conjunto imagen y ordene las ecuaciones de mayor a menor pendiente:

a) $f = \left\{(x, y) / y = \frac{3}{4}x - 2\right\}$

b) $f = \{(x, y) / y = -2x - 2\}$

c) f definida por y= -x

d) f definida por y= - 3

2. Grafique las siguientes funciones de 1º grado:

a) $y = -\frac{1}{4}x + 6$

b) x= 0

c) y = 0

d) x = 1

e) x = -4

f) y = -2

g) 3y + 4x=6

h) -2x + 3y -2= 0

3. Dadas la pendiente y la ordenada al origen, escriba la ecuación de la recta:

a) $a = -2 \quad b = \frac{2}{3}$

b) $a = \frac{1}{3} \quad b = -\frac{5}{2}$

c) a= 0 b= 4

d) a=2 b = 6

4. Dados los puntos A= (1,4) y B=(-1,1) verifique si pertenecen o no a las rectas de ecuación:

a) y = 2x

b) y = x + 3

c) y = -2x + 6

d) y = -x

5. Determine el punto de intersección de las siguientes rectas con el eje $\overrightarrow{OX}$:

a) y=2x - 4

b) 3y=6x

c) 2x + 3y = 9

d) x-4 = 0

6. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales en la variable x:

a) $\frac{x+3}{x-5} = \frac{x+2}{x+4}$

b) $\frac{3x-2}{5} = 4 - \frac{1}{3}x$

c) $x - 3 = 2 - \frac{3}{2}x$

d) $\frac{x+3}{3} + 2 - \frac{x}{4} = 2(x-2)$

Sistemas de ecuaciones lineales

7. Resuelva los siguientes sistemas gráfica y analíticamente:

a) $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{9}{5}x + 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y + 8x - 1 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x - 2y + 6 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2y - x = 5 \\ -6y + 3x = -5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x = 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 10y = 14 \end{cases}$

Problemas de aplicación

I) Si la fábrica A invirtió \$120000 menos que la fábrica B y entre ambas suman \$305000, ¿cuál es el monto de la inversión realizada por cada fábrica?

II) El área total sembrada en un campo es 200ha. El área sembrada con maíz excede en 32 ha a la sembrada con trigo y en 65 ha a la sembrada con cebada. Encuentre el área sembrada con cada cereal.

III) En un establecimiento agropecuario, se alimentan 2000 vacunos de dos razas diferentes Shorton y Aberdeen Angus. Del total se envían a faena 200 animales, de los cuales se sabe que un 60 % corresponde a la raza Shorton y el resto a la segunda raza. Indique la cantidad de animales de cada raza que se faenarán.

IV) En una pastelería se fabrican dos clases de tartas. La primera necesita 2,4 kg de masa y 3 horas de elaboración. La segunda necesita 4 kg de masa y 2 horas de elaboración. Calcula el número de tartas elaboradas de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 kg de masa?

V) Dos grifos han llenado un depósito de 31 m^3 corriendo el uno 7 horas y el otro 2 horas. Después llenan otro depósito 27 m^3 corriendo el uno 4 horas y el otro 3 horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada grifo?

VI) En una envasadora de café se trabaja con granos de dos calidades diferentes, cuando se toma 2 kg de la primera calidad y 3 kg de la segunda resulta una mezcla que puede venderse a $ 5,5/kg, y cuando se toma 3 kg de la primera clase y 2 kg de la segunda resulta la mezcla a $7 /kg ¿Cuál es el precio de cada calidad de café?

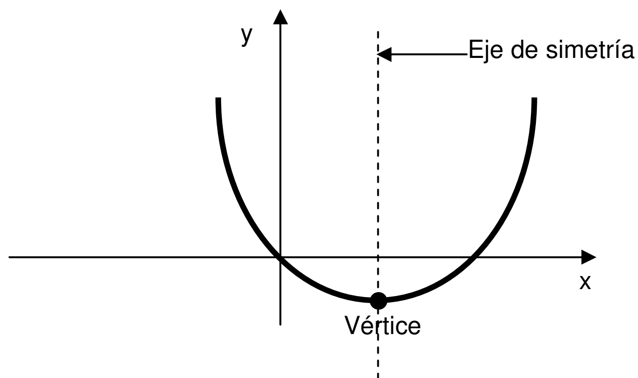
FUNCIONES DE SEGUNDO GRADO

Función de segundo grado

✓ La función f: ℝ → ℝ $\quad x \rightarrow ax^2 + bx + c$

donde a, b y c son constantes pertenecientes al conjunto de los números reales ℝ y con $a \neq 0$ se llama **función cuadrática** o **función de segundo grado en la variable x**. Puede definirse como un conjunto de pares ordenados de la forma: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax^2 + bx + c;\ a, c \wedge b \in \mathbb{R};\ a \neq 0\}$

La función **cuadrática** puede representarse gráficamente en el plano real como una **parábola**, la igualdad $y = ax^2 + bx + c$ se denomina ecuación polinómica de la parábola.

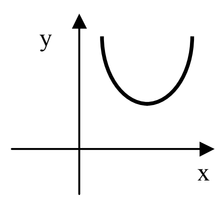


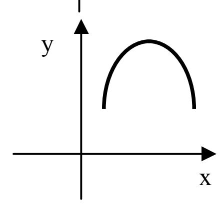
La parábola es una curva que presenta las siguientes características generales:

✓ Un eje de simetría paralelo o coincidente con el eje $\overrightarrow{OY}$, de ecuación $x = -\dfrac{b}{2a}$

✓ Un punto especial denominado vértice V de coordenadas $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$

✓ Si a > 0 es una curva cóncava hacia arriba, el vértice es un mínimo





✓ Si a < 0 es una curva cóncava hacia abajo, el vértice es un máximo

Ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita

Sea la función de segundo grado en x definida por: $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, se denomina ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita asociada a esta función a la expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Resolver una ecuación cuadrática consiste en encontrar aquel o aquellos números reales (si es que existen), que la verifican. Estos números se denominan ***raíces de la ecuación****.*

Geométricamente significa encontrar las primeras componentes de los puntos de la parábola que tienen la segunda componente igual a cero, es decir la intersección de la curva con el eje $\overrightarrow{OX}$.

Las raíces se calculan mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, sea la ecuación $x^2 + 2x + 4= 0$, las raíces se calculan aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

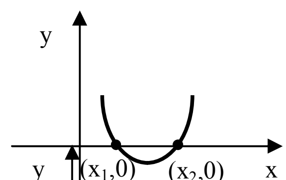
$$x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$$

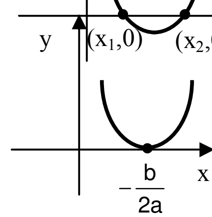
Naturaleza de las raíces

Si las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se representan por x_1 y x_2 y los coeficientes a, b y c son números reales, es evidente que las raíces **dependen del signo** de la expresión $(b^2 - 4\ a.c)$. Esta expresión se denomina **discriminante**. De modo que si:

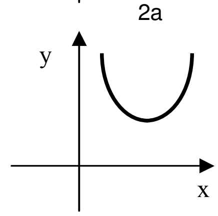
✓ $(b^2 - 4\ a.c) > 0$ las raíces son reales y distintas. La parábola intersecta al eje x en los puntos $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$.



✓ $(b^2 - 4\ a.c) = 0$ las raíces son reales e iguales, es decir una raíz doble. La parábola toca al eje x en un punto $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$



✓ $(b^2 - 4\ a.c) < 0$ las raíces no son números reales (son números complejos). La parábola no interfecta al eje x .



Trabajo Práctico N° 4

Funciones y ecuaciones de segundo grado

1. Dadas las siguientes funciones cuadráticas determine vértice, eje de simetría, dominio, conjunto imagen, intersección con los ejes y grafique en ejes coordenados cartesianos.

a) $y = x^2 – x - 2$

b) $y = x^2 – 6x + 5$

c) $y = x^2 + x + 4$

d) $y = x^2$

e) $y = - 4x^2 +32 x -64$

f) $y = - x^2 + x + 6$

2. Encuentre el valor de b para que la parábola $y = x^2 + b x + 4$ tenga el vértice en (1,3)

3. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la fórmula:

a) $x^2 – 3x + 2 = 0$

b) $x^2 –x - 12 = 0$

c) $6x^2 – 6x + 6 = 0$

d) $2x^2 – 4x + 3 = 0$

4. Determine, en las siguientes ecuaciones, la naturaleza de las raíces y calcúlelas en el caso de ser posible:

a) $x^2 + 6x + 1 = 0$

b) $-3x^2 + 6x - 3 = 0$

c) $2x^2 + 6 = 0$

d) $2 x^2 - 8x = 0$

5. Determine el o los valores de k para que la ecuación dada tenga raíces iguales.

a) $k x^2 + 8x + 4 = 0$

b) $x^2 + kx + 8 = k$

c) $x^2 – 3k x + 9 = 0$

6. En la ecuación $5 x^2 - x + c = 0$ encuentre el valor de c para que las raíces sean:

a) reales y distintas

b) reales e iguales

c) no reales.

7. Resuelva:

a) $(x-1) (x+3) = x$

b) $\frac{x+7}{x} = \frac{2x+3}{-x-2}$

c) $x(x +5) +5/2 = 2x$

8. Determine la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

a) $x_1 = 2$ y $x_2 =-2$

b) $x_1 = -2/3$ y $x_2 =1$

c) $x_1 = 0$ y $x_2 =4$

d) $x_1 = -4/3$ y $x_2 =-3/2$

9. Determinar el vértice de las funciones e indicar si es un máximo o un mínimo:

a) $y = x^2 – x - 2$

b) $y = x^2 – x - 2$

c) $f(x) = -(x – 2)^2+3$

Problemas de aplicación

I) Un cuerpo que está sobre el piso recibe una fuerza hacia arriba, si la altura que alcanza en metros está dada por $y = -3/4\ t^2 +3t$, siendo t el tiempo medido en segundos, ¿en que instante alcanza la altura máxima?¿cuál es esa altura? A los cuántos segundos vuelve a tocar el piso?

II) Al lanzar un proyectil la altura y expresada en m en función del tiempo t (s) viene dada por la ecuación: $y = \frac{-1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t$.

a)¿En cuanto tiempo se alcanza la altura máxima?

b) ¿Cuándo llega al suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

III) El rendimiento de un generador de placas solares en función de la temperatura está dado por una función cuadrática. Si el rendimiento es máximo para una temperatura de 50 ºC y es nulo para 10 ºC y 90 ºC. Dibuje una gráfica que represente esta situación.

IV) Si la suma de dos números es 9 y su producto es 20, ¿cuáles son estos números?

V) El número de cerdos atacados cada día por una determinada enfermedad viene dada por la función: $f(x) = - x^2 + 38 x + 75$, donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad.
Calcule:
a. ¿Cuántos cerdos enferman el quinto día?
b. ¿Cuándo deja de aumentar el número de animales enfermos?
c. ¿Cuándo desaparecerá la enfermedad?

UNIDAD 3

POLINOMIOS

POLINOMIOS

Antes de desarrollar la teoría de polinomios, es necesario definir los siguientes conceptos:

Expresión algebraica racional: es toda combinación de números y variables (que se denotan con letras), en ella las variables están afectadas por las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Por ejemplo: $3x^2 + 2x+3$.

Las expresiones algebraicas racionales se clasifican en: expresiones algebraicas racionales enteras y fraccionarias.

Expresión algebraica racional entera: son expresiones en las que las variables están vinculadas por las operaciones de suma, resta y multiplicación. Las potencias son con exponentes naturales. Por ejemplo: $x^3 + 4xy - \sqrt[3]{3}\,y^4 + \frac{1}{8}b^5$ es una expresión algebraica racional entera puesto que las operaciones de radicación y división afectan a los coeficientes y no a las variables.

Expresión algebraica racional fraccionaria: son expresiones en las que alguna de las variables forma parte de un divisor o presenta exponente negativo. Por ejemplo: $4x^3 + 6x^{-2}y + \frac{1}{3}b^4$

Expresión algebraica irracional: son expresiones en las que alguna de las variables está afectada por radicales o exponente fraccionario. Por ejemplo: $x^3 + \sqrt[3]{y} + x^{\frac{2}{3}}$.

POLINOMIOS

Polinomio es toda expresión algebraica racional entera. Se puede decir que se llama forma polinómica de grado **n** o polinomio formal de grado **n** en una indeterminada x en el conjunto de los números reales (R) a toda expresión de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

siendo $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n \in R$; $a_n \neq 0$ y $n \in N$.

El *grado* de un polinomio es el mayor exponente de la indeterminada o variable cuyo coeficiente es distinto de cero.

Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ se denominan coeficientes de x. Un polinomio en una indeterminada x se simboliza con letras mayúsculas por ejemplo, P(x) que se lee "P de x".

a_0 se llama término independiente y a_n coeficiente principal o director.

Si el polinomio tiene un solo término se denomina *monomio*, si tiene dos términos se denomina *binomio*, con tres es un *trinomio*, con cuatro es un *cuatrinomio*.

Polinomios especiales

Polinomio **nulo**: es aquel que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. P(x)=0.

Polinomio **mónico**: es aquel que tiene su coeficiente principal igual a 1. Por ejemplo:

$P(x)=3 + 4x^2 + x^6$ es un polinomio mónico de grado 6.

Polinomio **ordenado**: un polinomio está ordenado si todos los términos que lo componen están ordenados de manera creciente o decreciente según los exponentes de la variable o indeterminada.

En forma creciente: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

En forma decreciente: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Polinomio **incompleto**: es un polinomio al que le faltan algunos términos, para completarlo se agregan los términos faltantes con coeficiente cero. Por ejemplo:

$P(x)=3 + 4x^2 + 5 x^6$ es un polinomio incompleto, para completarlo se agregan términos:

$P(x)=3 + 0x + 4x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 5 x^6$, este polinomio está completo y ordenado en forma creciente.

Función polinómica

- ✓ La función P: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to P(x)= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

se denomina función polinomial o polinómica. También puede definirse como:

$$P= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \}$$

Esta función asigna valores a la variable x en el conjunto $\mathbb{R}$, es decir hace corresponder a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ un valor $P(x) \in \mathbb{R}$, llamado **valor de la función polinomial** en x. Por ejemplo, sea la función polinómica tal que:

$$P(x)= 2x^2 + x+ 4$$

Si x = 2, resulta:

$$P(2)= 2(2)^2 + 2+ 4=14$$

Se dice entonces que 14 es el valor del polinomio para x = 2.

Casos particulares

- ✓ **Función constante**, definida por f(x)= k ó y = k, es una función polinómica de grado cero.
- ✓ **Función de primer grado**, definida por $f(x)= a_1 x + a_0$, es una función polinómica de grado uno.
- ✓ **Función de segundo grado o cuadrática**, definida por $f(x)= a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, es una función polinómica de segundo grado.

Ceros de una función polinomial, raíces de un polinomio

Se dice que **a** es un cero de una función polinómica P(x) si P(a) = 0.

Se dice que **a** es una raíz de la ecuación polinómica P(x) = 0 si al reemplazar x por a el primer miembro de la ecuación es igual a 0.

Por ejemplo, dada la función**:** P(X) =2 x + 1, el valor de x que la anula es $-\frac{1}{2}$, este es el cero de la función. Si consideramos el mismo polinomio pero expresado como una ecuación:

$$2x + 1 = 0,$$

despejando x se tiene: $x = -\frac{1}{2}$, esta es la raíz de la ecuación.

Operaciones con polinomios

1. Adición

La suma de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los coeficientes de los términos de igual grado. El grado del polinomio resultante es igual al mayor grado de los polinomios sumandos.

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La suma es:

$$P(x) + Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\ + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Por ejemplo, sean $P(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$ y $Q(x) = 3x^3 + x^2 + 2x$, su suma es:

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4) + (3x^3 + x^2 + 2x) = (2+3)\, x^3 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) x^2 + 2x + 4 =$$

$$= 5\, x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 + 2x + 4$$

2. Sustracción

La sustracción de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando a P(x) el opuesto de Q(x).

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La resta es:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\ + (-b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \cdots - b_3 x^3 - b_2 x^2 - b_1 x - b_0) =$$

$$= (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_3 - b_3) x^3 + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)$$

Por ejemplo, sean P(x)= $2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$ y Q(x)= $3x^3 + x^2 + 2x$, su diferencia es:

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4) + (-3x^3 - x^2 - 2x) = (2-3)\,x^3 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + 2x + 4 =$$

$$= -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

3. Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios consiste en multiplicar cada termino del primer polinomio por cada unos de los términos del segundo polinomio y luego se suman los coeficientes de términos de igual grado.

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

El producto es:

$$P(x).Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0).(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0) =$$

$$= (a_n .b_m)\,x^{n+m} + (a_{n-1} .b_{n-1})\,x^{n+m-1} + \cdots + (a_0 .b_0)$$

Por ejemplo, sean P(x)= $(2x^2 - 3x + 1)$ y Q(x)= $(2x - 3)$, su diferencia es:

$$P(x) . Q(x) = (2x^2 - 3x + 1) + (2x - 3) = (2x^2 - 3x + 1).\,2x + (2x^2 - 3x + 1)\,(-3) =$$

$$= 4x^3 - 6x^2 + 2x - 6x^2 + 9x - 3 =$$

$$= 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$$

En forma práctica:

$$\begin{array}{rr}
P(x) = & 2x^2 - 3x + 1 \\
.\,Q(x) = & 2x - 3 \\
\hline
 & -6x^2 + 9x - 3 \\
 & 4x^3 - 6x^2 + 2x \qquad \\
\hline
 & = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3
\end{array}$$

Productos especiales

Cuadrado de un binomio

Sea $(x + a)^2$

$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = (x + a)\,x + (x + a)\,a = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$\mathbf{(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

Por ejemplo, $(x + 4)^2 = x^2 + 2.4x + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

Además,

$$\mathbf{(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2}$$

Cubo de un binomio

Sea $(x + a)^3$

$(x + a)^3 = (x + a)^2 (x + a)$

$= (x^2 + 2ax + a^2)(x + a) = (x^2 + 2ax + a^2)x + (x^2 + 2ax + a^2)a$

$= (x^3 + 2ax^2 + a^2x) + (ax^2 + 2a^2x + a^3)$

$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

$$\mathbf{(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3}$$

Por ejemplo $(3x + 2)^3$:

$$(3x + 2)^3 = 3^3x^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2x + 2^3 = 27x^3 + 54x^2 + 12x + 8$$

Y se tiene también que:

$$\mathbf{(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}$$

Producto de la suma por la diferencia de un binomio

Sea $(x + a)(x - a)$:

$$(x + a)(x - a) = (x + a)x + (x + a)(-a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2$$

$$\mathbf{(x + a)(x - a) = x^2 - a^2}$$

4. División

Para realizar la división de dos polinomios, el polinomio dividendo debe tener grado mayor o igual que el del polinomio divisor, ambos deben estar ordenados en forma decreciente y el polinomio dividendo debe estar completo.

Dados P(x) de grado n y Q(x) de grado m, tal que n ≥ m, existe C(x) de grado (n-m) y R(x) tales que:

$$P(x)/Q(x) = C(x) \Leftrightarrow P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$$

Donde C(x) es el cociente y R(x) es el resto. Si el resto es igual a cero, la división es exacta.

Por ejemplo, se quiere dividir $P(x) = 4x^3 - 3x + 1$ entre $Q(x) = x^2 - x$,

$$\begin{array}{r|l}
4x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x^2 - x \\ \hline
-4x^3 + 4x^2 & = \underbrace{4x + 4}_{C(x)} \\ \cline{1-1}
4x^2 - 3x & \\
-4x^2 + 4x & \\ \cline{1-1}
\underbrace{x + 1}_{R(x)} &
\end{array}$$

Expresiones algebraicas fraccionarias

Se denomina **expresión algebraica fraccionaria** a toda expresión de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) dos polinomios y Q(x) distinto de cero.

Una expresión algebraica puede ser irreducible o reducible.

Expresión algebraica irreducible: es aquella que no presenta factores comunes al numerador y al denominador. Por ejemplo: $\frac{2x}{x-1}$, con $x \neq 1$

Expresión algebraica reducible: es aquella que presenta factores comunes al numerador y al denominador. Por ejemplo: $\frac{(x^2-1)}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = (x+1)$

Se puede operar con las expresiones algebraicas fraccionarias del mismo modo a como se opera con números racionales.

Representación gráfica de funciones polinómicas sencillas

En la Unidad 2 se detalló la representación de funciones polinomiales de primer y segundo grado.

Los polinomios de tercer grado o cúbicos, f(x)= ax^3+bx^2+cx+d, tiene representación gráfica sencilla.

Se puede demostrar que para todo número positivo h, se verifica que:

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{-b}{3a}+h\right)+f\left(\frac{-b}{3a}-h\right)\right]=f\left(\frac{-b}{3a}\right)$$

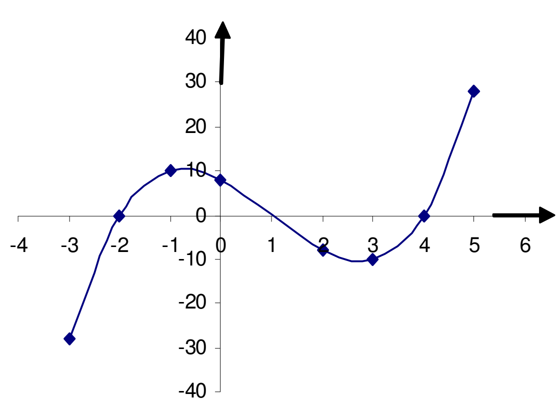
Esto muestra que la gráfica de una función polinomial de tercer grado es simétrica con respecto al punto $\left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$, lo cual significa que si la gráfica de f se traslada horizontal y/o verticalmente hasta una posición tal que el punto definido por la expresión anterior esté en el origen de coordenadas, entonces el gráfico trasladado será simétrico con respecto al origen.

Por ejemplo, se desea graficar la función f(x)= x^3-3x^2-6x+8, cuyas ceros son -2; 1 y 4. Los coeficientes son a=1, b=-3, c=-6, d=8.

Como: $\frac{-b}{3a} = -\frac{-3}{3} = 1$ y f(1) =0, la gráfica es simétrica con respecto al punto (1,0). Se confecciona una tabla de valores, para algunos valores de x se calculan los valores que toma la función:

x	-1	0	2	3	4	5
f(x)	10	8	-8	-10	0	28

Con estos valores, el punto de simetría y las raíces se traza la curva de esta función



Trabajo Práctico N° 5

Polinomios

1. Indique para cada polinomio su grado, su coeficiente principal, complételo si es necesario y determine el valor de P(2) y P(-1)

a) $P(x)=x^3-3x^2+x-5$ b) $P(u)=\sqrt{5}-u^3$ c) $P(t)=8$

d) $P(z)=-z^4-3z^2+5$ e) $P(t)=0$ f) $P(x)=3x^{12}-x^4-5x^2+3$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones no son polinómicas? Justifique su respuesta.

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4$

b) $f(x)=5x^2+2+\log x$

c) $f(x)=4+\frac{1}{x^3}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{30}\,x^2+x^3+8$

g) $f(x)=-8+x^4+3\sqrt{x}$

h) $f(x)=4$

3. Encuentre el valor de α en los polinomios para que se cumplan las condiciones indicadas:

a) $P(x)=x^3-3x^2+\alpha x-5$ si $P(2)=7$

b) $P(z)=-z^4-\alpha z^2+5$ si $P(1)=4$

4. Realice las siguientes operaciones:

a) $(2x^3-9x^2-4+5x)+(6x^4+x^2-5x)$

b) $(x^4-9x^2+1)+(10x^3+23x^2+12x)$

c) $(-3x^4+5x-2x^3-3)-(27x^3+36x-54x^2+8)$

d) $(5x^3+2x-4x^2-3)-(5x^2+14-6x)$

e) $(-4x^4+3x^2-1+x)-(2-5x^3-4x^2)$

5. Dados los polinomios:

$A(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 9x + 2$

$B(x) = x^2 - 2x + 3$

$C(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 1$

$D(x) = 4x^2 + 3x - 2$

encuentre:

i) [A(x)] [B(x)]

ii) [A(x)] [C(x)]

iii) [A(x)] [D(x)]

iv) [A(x)] [B(x) + C(x)]

v) [A(x)] [B(x) - C(x)]

vi) [A(x)] [B(x) - D(x)]

vii)[A(x)] [B(x) - C(x) - D(x)]

6. Dados los polinomios:

A(x) = 4x5 - 3x4 + 2x3 - 5x + 1

B(x) = x2 - x + 1

C(x) = x2 - 5x - 3

D(x) = x3 + 2x2 - 3x + 1

E(x) = x3 + 5x + 4

determine:

i) [A(x)] / [B(x)]

ii) [A(x)] / [C(x)]

iii) [A(x)] / [D(x)]

iv) [A(x)] / [E(x)]

v) [A(x)] / [B(x) - C(x)]

7. Calcule:

a) $(4 + x)^2$

b) $\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x\right)^2$

d) $(3x + 4)^3$

e) $\left(-3x^2 + \frac{1}{2}\right)^3$

f) $(x - 2)(x + 2)$

8. Simplifique las siguientes expresiones racionales:

a) $\frac{x+4}{x^2+8x+16} - \frac{x^2-4}{(x+2)}$

b) $\frac{6}{x^2+2x} - \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2}$

c) $\frac{3a^2+ab}{a^2+3ab}$

d) $\frac{a^2x^2+2a^2xy+a^2y^2}{ax^2-ay^2}$

9. Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+4x+4}$

b) $\frac{6}{x-1} - \frac{2x}{3x-3}$

c) $\frac{x^2+4}{x^2-4} . \frac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2+4x-8}$

d) $\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-1}\right):\frac{x^2+\frac{1}{2}x}{x+1}$

10. Grafique los siguientes polinomios cúbicos:

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$, siendo sus raíces -4 (raíz doble) y 1

b) $f(x) = x^3 + x - 2$, siendo sus raíces 1,-1 y -2

c) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, siendo sus raíces 1, -2 y -3

Problemas de aplicación

I) La altura en pies de un objeto impulsado hacia arriba con una velocidad inicial de 240 pies/s desde una altura inicial de 1600 pies puede expresarse como un polinomio en la variable t (tiempo) por $h(t) = -16t^2 + 240t + 1600$. Demuestre que 20 s es un cero e interprete este resultado.

II) El análisis de una ecuación que relaciona la distancia x con el tiempo t, reveló que un objeto viajó una distancia de 30 m cuando t = 10s. Las otras dos raíces de la ecuación fueron 4 y - 4. Determinar la ecuación que expresa a la distancia en función del tiempo.

III) El costo total C para elaborar un producto, en x unidades se puede calcular mediante la ecuación $C = x^3 - 90x^2 + 8000x + 300000$. Encontrar la cantidad de unidades que se pueden realizar, si el monto disponible es de $ 330624.

IV) El número de conejos en una granja atacados cada día por una determinada enfermedad viene dada por la función: $f(x) = -x^2 + 28x + 24$, donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad.

Calcule:
a) ¿Cuántos conejos enferman el cuarto día?
b) ¿Cuándo deja de crecer la enfermedad?
c) ¿Cuándo desaparecerá la enfermedad?

V) La producción total P en toneladas de una fábrica de mermeladas, en x unidades se puede calcular mediante la ecuación $P = x^3 + 20x^2 + 8000$. Encontrar la cantidad de unidades que se producirán, si se desean elaborar 10000 tn.

UNIDAD 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Función exponencial

Sea **a** $\in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina función exponencial a:

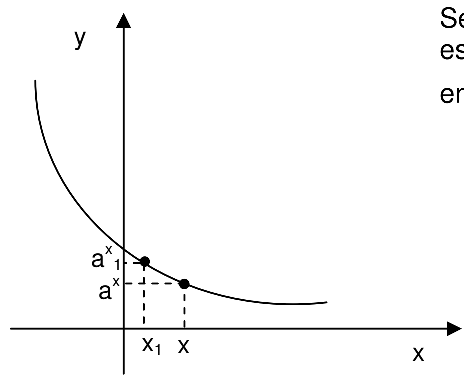
- ✓ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to a^x$

Como a es positivo se verifica que $\forall a \in \mathbb{R}$ es $a^x > 0$, por lo tanto el conjunto imagen es el conjunto de los números reales positivos. $D(f) = \mathbb{R}$ y $Img(f) = \mathbb{R}^+$.

Las características de la función dependen de que la base **a** sea mayor o menor que 1.

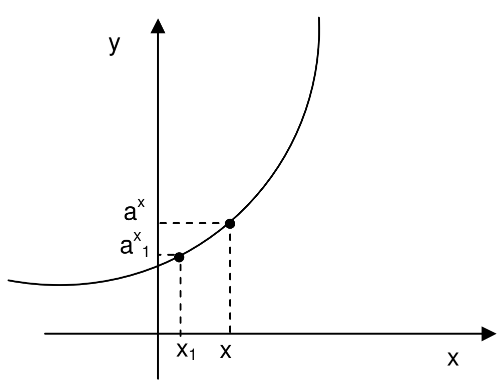
Función exponencial decreciente



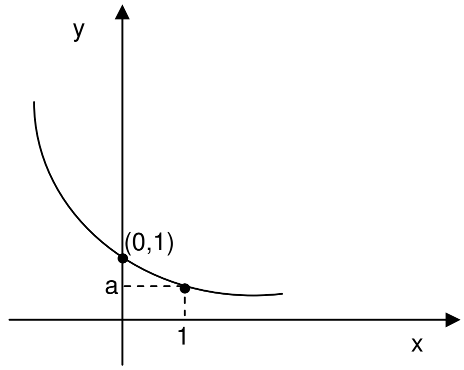
Se puede observar que a medida que x aumenta a^x es asintótico al eje de las abscisas. Y si $x_1 < x$, entonces $a^{x_1} > a^x$

Función exponencial creciente

Se puede observar que a medida que x aumenta , a^x crece rápidamente. Si $x_1 < x$ entonces $a^{x_1} < a^x$.



Los puntos (0,1) y (1,a) siempre pertenecen a la gráfica de la función exponencial cualquiera sea a (0 < a < 1; a >1).



Propiedades

Si x, y $\in \mathbb{R}$; a >0, a $\neq$ 1; b >0, b $\neq$ 1 son válidas las siguientes propiedades:

- ✓ $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- ✓ $a^x . a^y = a^{x+y}$
- ✓ $a^x / a^y = a^{x-y}$
- ✓ $(a^x)^y = a^{x.y}$
- ✓ $(ab)^x = a^x . b^x$
- ✓ $(a/b)^x = a^x / b^x$

Función logarítmica

Se denomina función logarítmica en base a:

- ✓ f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

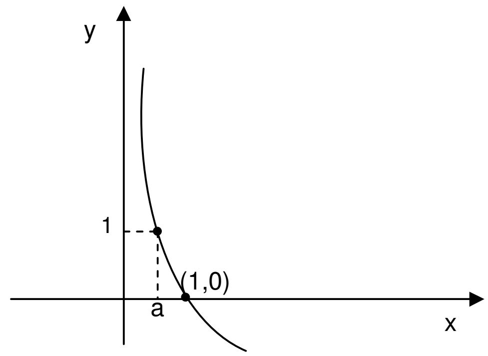
  x $\to \log_a x$

El dominio es D(f) = $\mathbb{R}^+$ y el conjunto imagen Img(f) = $\mathbb{R}$. En virtud de esta definición puede comprobarse que:

$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

Considerando dos casos a) 0 < a < 1 y b) a > 1

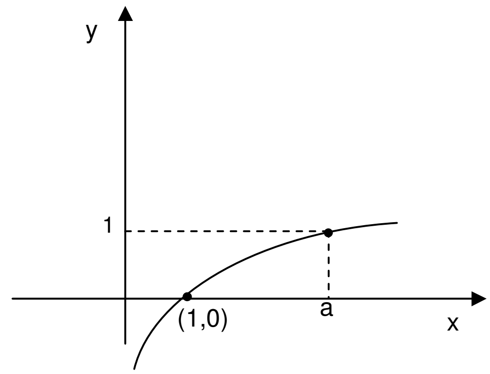
a) $0 < a < 1$



A medida que x aumenta,

$\log_a x$ decrece.

b) $a > 1$



A medida que x aumenta,

$\log_a x$ crece.

Los puntos (0,1) y (1,a) siempre pertenecen a la gráfica de la función logarítmica cualquiera sea a ($0 < a < 1$; $a > 1$).

- ✓ Como $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, determinar el valor de **y** conocido el valor de x significa hallar el exponente al que hay que elevar la base **a** para obtener el número **x**.

Por ejemplo: $\log_2 8 = y \Leftrightarrow 2^y = 8; 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$

Propiedades fundamentales de los logaritmos

Considerando exclusivamente el caso de $a > 1$:

1) $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
2) $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
3) $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$
4) Logaritmo de un producto de dos o mas factores positivos de igual base, es igual a la suma de los logaritmos de esos factores, respecto de la misma base:

$$\log_a(x_1 . x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

5) Logaritmo de un cociente entre dos números reales positivos de igual base, es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor, respecto de la misma base:

$$\log_a(x_1 / x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

6) El logaritmo de toda potencia de un número real positivo es igual al exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia:

$$\log_a {x_1}^{x_2} = x_2 . \log_a x_1$$

7) El logaritmo de la raíz enésima de un número real positivo es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[x_1]{x_2} = \frac{\log_a x_2}{x_1}$$

Logaritmos decimales

Considerando la función:

✓ f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \log_{10} x$

En virtud de esta definición puede comprobarse que $y = \log_{10} x \Leftrightarrow 10^y = x$

Se denomina a **y** el logaritmo decimal de x y se denota simplemente como log x. Por ejemplo:

log 10 = 1 puesto que $10^1 = 10$

log 100= 2 puesto que $10^2 = 100$

log 0,01 = -2 puesto que $10^{-2} = 0{,}01$

Los logaritmos decimales son números reales que pueden expresarse como decimales:

log 2 = 0,30103

el número a la izquierda de la coma decimal se denomina ***característica*** del logaritmo y los dígitos a la derecha se denominan ***mantisa***.

El logaritmo de un número se puede determinar con una calculadora.

Antilogaritmos

Si conocido el logaritmo de un número, y, se desea conocer x tal que log x=y, x se denomina **antilogaritmo** de y.

Como y = log x es $x=10^y$, entonces:

- Determinar el antilogaritmo de un número implica encontrar el número que tiene como logaritmo a y.
- X es el antilogaritmo de y $\Leftrightarrow x=10^y$

Logaritmos naturales o neperianos

Considerando la función:

✓ f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \log_e x$

En virtud de esta definición puede comprobarse que $y = \log_e x \Leftrightarrow e^y = x$, siendo el número e igual a 2,718281828. La función logaritmo natural se simboliza como y = ln x.

Trabajo Práctico N° 6
Funciones exponencial y logarítmica

1. Represente gráficamente las funciones exponenciales definidas por:

a) $y = 2^x$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $y = 3^x + 1$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. Resuelva:

a) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

b) $5^x + 5^{x+2} + 5^{x+4} = 651$

3. Represente en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos:

a) $y = \log_2 x$ y $y = 2^x$

a) $y = \log_3 x$ y $y = 3^x$

4. Encuentre:

a) $\log_3 81$

b) $\log_5 \frac{1}{25}$

c) $\log_4 1$

d) $\log_{1/3} 1$

e) $\log_4 4$

f) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$

Infiera una regla que surja como consecuencia de los ejercicios c) a f).

5. En cada uno de los ejercicios propuestos calcule el valor de la letra:

a) $\log_2 32 = t$; b) $\log_4 y = -2$; c) $\log_a \frac{1}{16} = 4$

6. En cada uno de los ejercicios pase a la forma exponencial o logarítmica según corresponda.

a) $3^5 = 243$

b) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

c) $\log_9 81 = 2$

d) $\log_{10} 0{,}1 = -1$

e) $4^0 = 1$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

7. Aplicando las propiedades de los logaritmos, considerando que la base es 10 y sabiendo que log 2 = 0,30103 y que log 3=0,47712, calcule:

a) log 4

b) log 6

c) log 1,5

d) log $\sqrt{2}$

e) log 12

f) log $\frac{1}{3}$

8. Aplicando las propiedades exprese como un único logaritmo a:

a) $3\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - 3\log 3 - \log 25$

b) $\log 5 + \frac{3}{4}\log 9 - 4\log 4$

c) $\frac{1}{2}\log a - 2\log b - \log c - \frac{5}{3}\log d$

9. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3^{x+1} = 81$

b) $4^{x^2+x} = 16$

c) $4^{x+2} = 8^{x-1}$

d) $\log_a x = \log_a 2 + 3\log_a 2 - \log_a 4$

e) log (x+4) + log (x-1) =2

Problemas de aplicación

I) El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por:

$$N(t) = 200\left(\frac{4}{5}\right)^t$$

a) ¿Cuántas bacterias están presentes al inicio?
b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de 4 minutos, aproximadamente?
c) Trace una grafica aproximada de la función dada.

II) La cantidad de cerdos de una granja es 2500, si crece a razón de 16 % anual:
a) Encuentre la función que describe la cantidad de cerdos en función del tiempo en años.
b) ¿qué cantidad de ganado se tendrá luego de 2 años?

III) Se tienen 200 mg de una sustancia radiactiva. Ésta decae exponencialmente de modo que después de t años, la cantidad N que queda (en mg) está dada por: $N(t) = 200e^{-0,034t}$
a) ¿cuántos mg de sustancia quedan después de 10 años?
b) ¿Cuántos mg de la sustancia quedan después de 20 años?
c) Trace una gráfica aproximada de la función dada
IV) Se debe limpiar un tanque de 500 litros con una solución al 25 % de ácido

y el resto de agua. Para limpiar el tanque, se introduce agua limpia por medio de una canilla a razón de 4 litros por segundo. Simultáneamente, se desagota el tanque a razón de 4 litros por segundo. El porcentaje de ácido remanente viene expresado por la fórmula $P(t) = 24e^{-0,02t}$

a) Determine qué porcentaje de ácido queda luego de 10 minutos de iniciada la limpieza.
b) ¿Cuándo quedará 10 % de ácido?

V) Para medir la alcalinidad o acidez de una solución acuosa un químico utiliza el pH que se define como: $pH = -\log[H^+]$, es decir el logaritmo negativo de la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$. Si el pH es mayor que 7 la solución es alcalina, si es igual a 7 es neutra y ácida si es menor que 7.

a) Si una solución de limpieza tiene pH 8,5, ¿cuál es la $[H^+]$ de la solución?

b) ¿Cuál es el pH del vinagre si $[H^+]=3x10^{-4}$?

c) si el pH de una bebida carbonatada es 3, ¿cuál es la $[H^+]$?

-

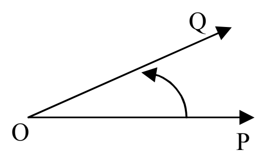
UNIDAD 5

TRIGONOMETRÍA

TRIGONOMETRÍA. ANGULOS. RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Ángulos

Angulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectos con origen en común. El origen se denomina vértice (O) y las semirrectas lados $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

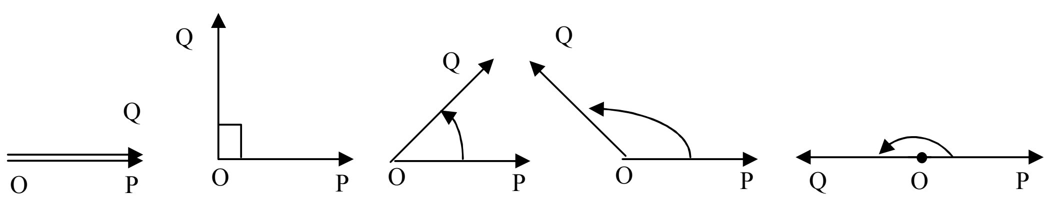


El ángulo de la figura es un ángulo orientado, es la sección del plano determinado por la rotación de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ hacia la semirrecta $\overrightarrow{OQ}$, en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj).

Por convención:

- Un ángulo generado en sentido antihorario es positivo.
- Un ángulo generado en sentido horario es negativo.

Clasificación de ángulos



ángulo **nulo**	ángulo **recto**	ángulo **agudo**	ángulo **obtuso**	ángulo **llano**
no hay ángulo y sus lados coinciden	sus lados son perpendiculares	es menor que un recto	es mayor que un recto	son dos rectos, las semirrectas tienen sentidos opuestos

Los ángulos que tienen las semirrectas que los componen coincidentes pero que difieren en un número entero de giros completos se denominan **congruentes**.

Ángulos complementarios: son aquellos cuya suma es igual a un ángulo recto.
Ángulos suplementarios: son aquellos cuya suma es igual a un ángulo llano.
Angulos opuestos: son aquellos cuya suma es 360º, es decir un giro completo.

Sistemas de medición de ángulos

Los sistemas de medición de ángulos más utilizados son el sistema *sexagesimal* y el sistema *circular*.

Sistema sexagesimal

La unidad de medida es el grado sexagesimal que corresponde a la noventava parte de un ángulo recto (que se denota con R), por lo tanto un ángulo recto corresponde a 90º. Es decir:

$$1º = \frac{1}{90} R \Rightarrow 1R = 90º$$

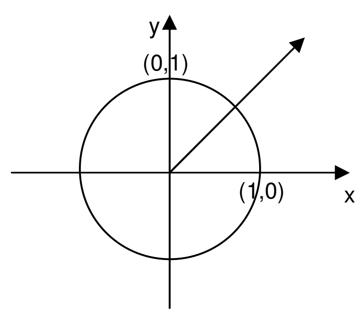
Los submúltiplos son el minuto sexagesimal (1') que corresponde a la sesentava parte de 1º y el segundo sexagesimal (1'') que corresponde a la sesentava parte de 1'.

$$1° = 60'$$
$$1' = 60'',\ 1° = 3.600''$$

Sistema circular

En este sistema la unidad de medida es el radián.

Considerando un sistema de ejes coordenados cartesianos, una circunferencia de centro 0 y de radio unidad y un ángulo central (es decir un ángulo cuyo centro coincide con el centro de la circunferencia), se define a un **radián** como el arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia a la que pertenece.



Para expresarlo de otra forma, como el perímetro de una circunferencia de radio r es $2\pi.r$ en el caso de la figura r =1, y r indica tanto el radio de la circunferencia como la longitud del arco de un radián, entonces el perímetro de la circunferencia expresado en radianes es igual a 2π. Además esa circunferencia corresponde a un ángulo central de un giro (360º), entonces, 2π radianes= 360º.

2π radianes= 360º (ángulo completo, de un giro)

$$1 \text{ radián} = \frac{360}{2\pi} = 57º\ 17'\ 45''$$

Operaciones

Suma de ángulos

La suma de dos ángulos es otro ángulo. Si se desea sumar en sistema sexagesimal, por ejemplo, sumar 35º 40' 28'' y 20º 52' 40''

$$\begin{array}{rrr} & 35^{\circ}\ 40' & 28'' \\ + & & \\ & 20^{\circ}\ 52' & 40'' \\ \hline & 55^{\circ}\ 92' & 68'' \\ & +\ 1' & -60 \\ & 94' & 8'' \\ & -60 & \\ & 34' & \\ +1^{\circ} & & \\ \hline 56^{\circ} & & \end{array}$$

Por lo tanto la suma es 56º 34’ 8’’

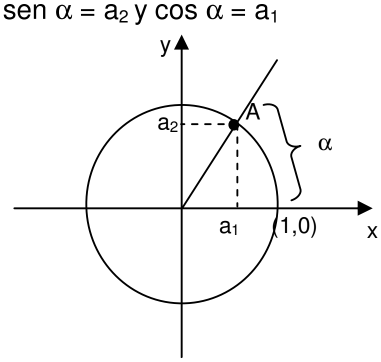
Resta

La resta de dos ángulos es igual a otro ángulo, se sigue un procedimiento similar de conversión de segundos a minutos y de minutos a grados.

Funciones trigonométricas

Considerando un sistema de ejes coordenados cartesianos, una circunferencia C de centro 0 y de radio unidad, sea A un punto cualquiera de C, de coordenadas (a_1, a_2) y α es un argumento del punto A y además es un medida en radianes del ángulo formado entre el eje de las abscisas y la semirrecta con origen en el origen de coordenadas y que intersecta al punto A, se define a las funciones seno y coseno de α como:

$$\text{sen}\ \alpha = a_2 \text{ y } \cos \alpha = a_1$$



✓ sen: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

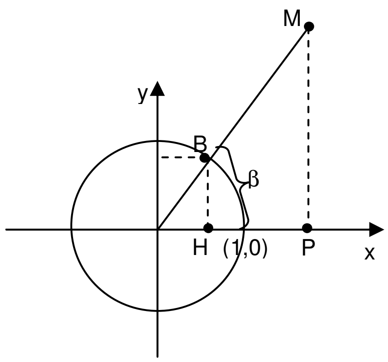
$\alpha \rightarrow \text{sen}\ \alpha$

✓ cos: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\alpha \rightarrow \cos \alpha$

Si se trabaja con el mismo gráfico anterior pero considerando dos triángulos rectángulos

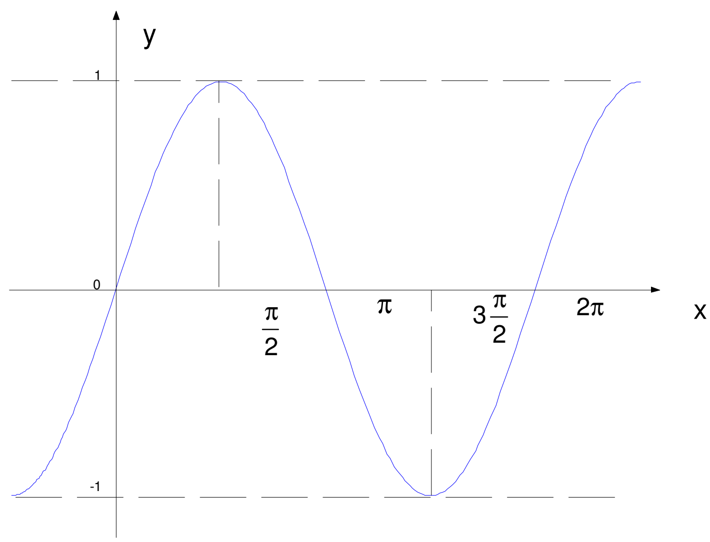
$\overset{\Delta}{MOP}$ y $\overset{\Delta}{BOH}$ y sea β un argumento correspondiente al punto B = (b_1, b_2) que resulta de la intersección de la circunferencia $\mathcal{C}$ con $\overline{OM}$, se observa por semejanza de triángulos que:



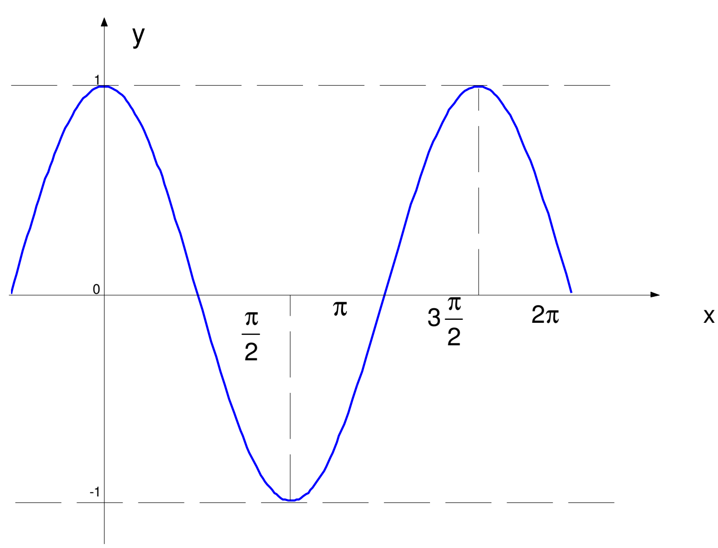
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b_2}{1} = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\text{cateto opuesto a } M\hat{O}P}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\beta = \frac{b_1}{1} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\text{cateto adyacente a } M\hat{O}P}{\text{hipotenusa}}$$

La representación cartesiana de la función y = sen x para el período [0, 2π] es:

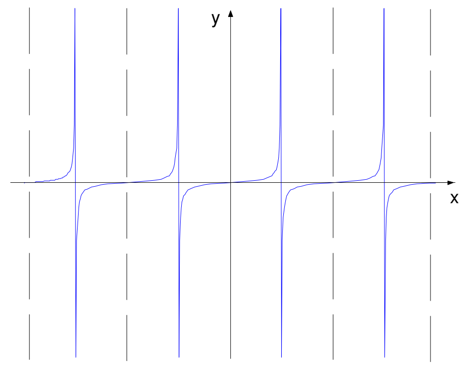


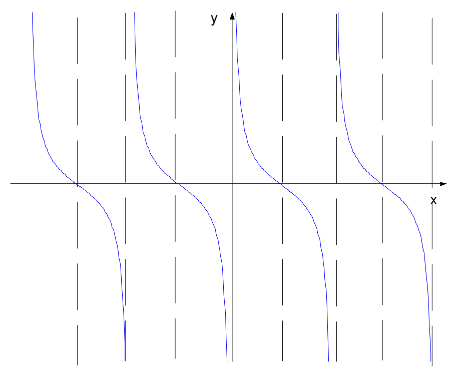
La representación cartesiana de la función y = cos x es:



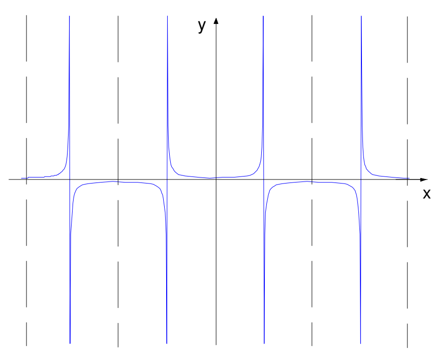
Otras funciones trigonométricas, graficadas en el intervalo [-2π, 2π] son:

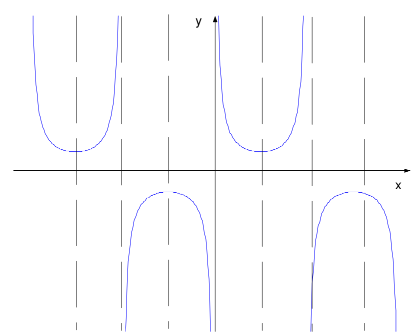
Función tangente: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$ **Función cotangente**: $\cot g\,\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$





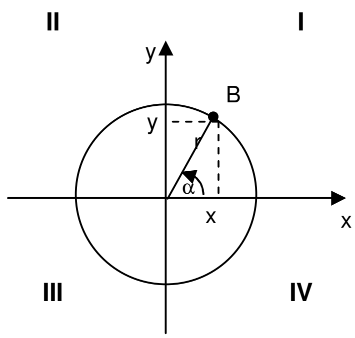
Función secante: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$ **Función cosecante**: $\cos c\,\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$.





Todas las funciones trigonométricas son periódicas, es decir, el valor de cada una se repite a intervalos regulares llamados periodos. El periodo de todas las funciones, excepto la tangente y la cotangente, es 360° o 2π radianes. La tangente y la cotangente tienen un periodo de 180 ° o π radianes.

Estas funciones también pueden definirse de la siguiente manera: si se considera un sistema de coordenadas cartesianas, una circunferencia de radio r, con centro en el origen, un ángulo centrado α , se pueden definir funciones trigonométricas con dominio en un conjunto de ángulos y codominio o conjunto imagen en los números reales. Para determinar estos números, se considera el ángulo α cuyo lado coincide con el eje de las abscisas y el otro lado está incluido en uno de los cuatro cuadrantes determinados por el sistema de ejes) o coincide con uno de los semiejes. El punto B de coordenadas (x,y) surge de la intersección del lado terminal de α con la circunferencia. Se pueden definir las **razones trigonométricas** de un ángulo α como:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Estas razones están definidas siempre que el denominador sea distinto de cero.

Signo de las funciones trigonométricas

Dado un punto del plano B=(x,y), el signo de sus coordenadas x e y depende del cuadrante en donde esté situado dicho punto B:
- Si B es del primer cuadrante, será de la forma: (+,+).
- Si B es del segundo cuadrante, será de la forma: (-,+).
- Si B es del tercer cuadrante, será de la forma: (-,-).
- Si B es del cuarto cuadrante, será de la forma: (+,-).

El radio r en trigonometría se toma siempre positivo. En consecuencia, los signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes son:

Función	**CUADRANTE**			
	I	II	III	IV
seno	**+**	**+**	**-**	**-**
coseno	**+**	**-**	**-**	**+**
tangente	**+**	**-**	**+**	**-**
cosecante	**+**	**+**	**-**	**-**
secante	**+**	**-**	**-**	**+**
cotangente	**+**	**-**	**+**	**-**

Reducción de ángulos al primer cuadrante

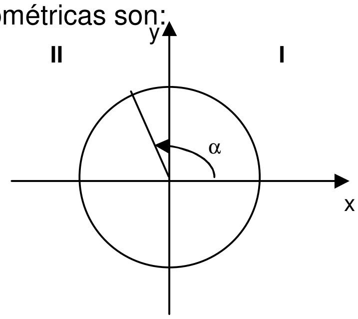
Si se conocen los valores de las funciones trigonométricas para ángulos del primer cuadrante, es posible obtener, mediante relaciones y analizando el signo, los valores de estas funciones para cualquier ángulo superior a un o recto.

Reducción del 2º cuadrante al 1º

El ángulo α está comprendido entre: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, este ángulo reducido al primer cuadrante es: $(\pi-\alpha)$, sus funciones trigonométricas son:

sen α = sen $(\pi-\alpha)$

cos α = cos$(\pi-\alpha)$

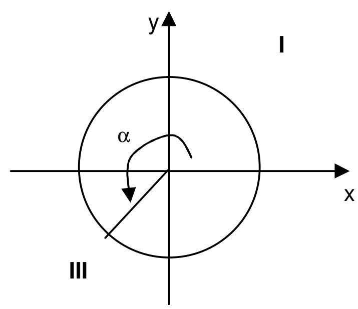


Reducción del 3º al 1º cuadrante

El ángulo α está comprendido entre: $\pi < \alpha < 3\frac{\pi}{2}$, este ángulo reducido al primer cuadrante es:

$(\alpha - \pi)$, sus funciones son:

sen α = -sen $(\alpha-\pi)$
cos α = -cos $(\alpha-\pi)$

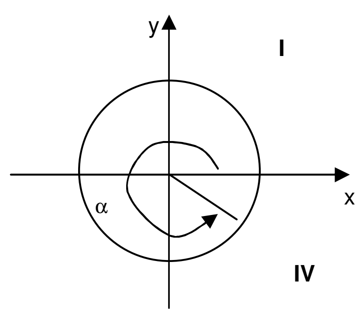


Reducción del 4º al 1º cuadrante

El ángulo α está comprendido entre: $3\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, este ángulo reducido al primer cuadrante es:

$(2\pi-\alpha)$.

sen α = - sen $(2\pi - \alpha)$
cos α = cos $(2\pi - \alpha)$



- ✓ En el II cuadrante los ángulos se relacionan con el suplementario (π - α) y las razones son las mismas con el signo correspondiente.
- ✓ En el III cuadrante los ángulos se relacionan con los que difieren un llano ($\alpha + \pi$), y las razones son las mismas con el signo contrario.
- ✓ En el IV cuadrante los ángulos se relacionan con su opuesto (α -2π) y las razones son las mismas con el signo contrario.

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

Las relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo, se denominan fórmulas fundamentales, estas son:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables

α		Función					
(grados)	**(Radianes)**	**sen**	**cos**	**tg**	**cotg**	**sec**	**cosec**
0	0	0	1	0	No definida	1	No definida
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	No definida	0	No definida	1

Identidades trigonométricas

A continuación se presentan identidades trigonométricas, muy útiles para la resolución de problemas:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$\cos\,(x+\frac{\pi}{2}) = -\text{sen}\ x$

$\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}-y) = \cos y$ $\cos\,(\frac{\pi}{2}-y) = \text{sen}\ y$

$\text{sen}\,(\pi-y) = \text{sen}\ y$ $\cos\,(\pi-y) = -\cos y$

$\text{sen}\,(\pi+y) = -\text{sen}\ y$ $\cos\,(\pi+y) = -\cos y$

$\text{sen}\,(-y) = -\text{sen}\ y$ $\cos\,(-y) = \cos y$

$\text{sen}\ 2x = 2\ \text{sen}\ x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\text{sen}\ x + \text{sen}\ y = 2\ \text{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Resolución de triángulos

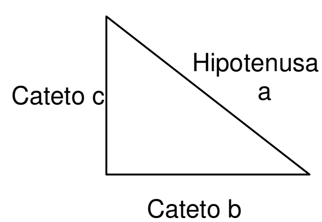
Como aplicación de las funciones trigonométricas se considera la **resolución de triángulos.**

Resolver un triángulo implica obtener algunos elementos, como medidas de ángulos y/o de lados, dados otros elementos.

Se debe recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Resolución de triángulos rectángulos

Para resolver triángulos rectángulos se requieren dos datos que no pueden ser las medidas de sus ángulos interiores. Se utiliza el teorema de Pitágoras: “en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



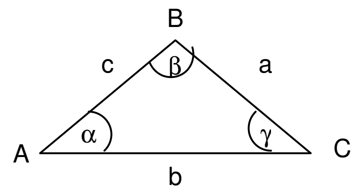
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Resolución de triángulos oblicuángulos

Para resolver triángulos oblicuángulos se requieren otros datos que no pueden ser las medidas de los tres ángulos interiores. Resultan útiles los teoremas del seno y del coseno.

Teorema del seno

En todo triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ se verifica: $\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c}$



Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$

Trabajo Práctico N° 7

Trigonometría

Ángulos

1. Exprese los siguientes ángulos en:

a) radianes

0°, 15°, 22° 30', 45°, 60°, 75°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°,225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°

b) en grados

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2}, 4\frac{\pi}{3}, 9\frac{\pi}{4}, 11\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{7}, 3\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{4},, 8\frac{\pi}{3}, 6\frac{\pi}{7}, 3\pi, 5\pi, 6\pi$

2. Realice las siguientes operaciones:
   a) 20º 15’ 35’’ + 30º 25’ 45’’
   b) 40º 55’ 15’’ + 30º 40’ 25’’
   c) 55º 18’ 45’’ + 80º 15’ 5’’
   d) 40º 45’ 45’’ - 30º 25’ 25’’
   e) 55º 15’ 35’’ - 30º 5’ 15’’
   f) 68º 25’ 15’’ - 30º 10’ 5’’

Funciones trigonométricas

3. Utilizando las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$, calcule las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente y cotangente de:

a) $7\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{12}$

4. Determine el resto de las funciones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

a) $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y α se encuentra en el 1º cuadrante.

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ y α se encuentra en el 2º cuadrante.

c) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ y α se encuentra en el 3º cuadrante.

d) $\text{tg}\alpha = -3$ y α se encuentra en el 4º cuadrante.

e) $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ y α se encuentra en el 3º cuadrante.

5. Dibuje el ángulo α, indique a qué cuadrante pertenece y calcule todas sus razones trigonométricas en cada uno de los siguientes casos:

a) $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\alpha > 0$

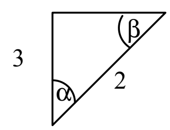
b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\text{sen}\,\alpha > 0$

c) $\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$ y $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha > 0$

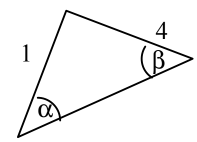
d) $\text{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha > 0$

6. Calcule los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos α y β de los triángulos rectángulos:

a)



b)



Identidades trigonométricas

7. Compruebe las siguientes identidades:

a) $\text{sen}\alpha \,.\, \sec\alpha = \text{tg}\alpha$

b) $\frac{\text{tg}\alpha}{\text{sen}\alpha} = \sec\alpha$

c) $\sec^2\alpha = \text{cosec}\alpha \,.\, \text{sen}\alpha + \frac{1}{\text{cotg}^2\alpha}$

d) $\text{sen}\alpha(\text{cosec}\alpha - \sec\alpha) = 1 - \text{tg}\alpha$

e) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + 1$

f) $\text{cotg}\alpha \,.\, \sec\alpha = \text{cosec}\alpha$

g) $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}$

h) $\frac{\text{sen}\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \text{cosec}\alpha} = \cos\alpha\,\text{sen}\alpha$

Resolución de triángulos

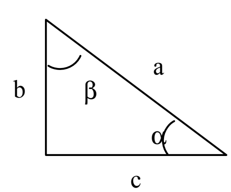
8. Resuelva el triángulo rectángulo de la figura sabiendo que:

a) a=180 m y α= 36º 20’

b) a=15 m y β= 46º 30’

c) a=10 m y α= 52º 20’

d) c=65 m y β= 36º 40’



9. Resuelva el triángulo oblicuángulo

a) a = 4,6 m, α = 43º, γ= 59º

b) b = 1000 m, α = 46º 20', γ= 59º 20'

c) b = 8 m, c= 6 α = 30º

d) a= 10, b=6, c=8

Problemas de aplicación

I) Dos observadores A y B ven un globo cautivo que está situado en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre ellos es de 6 km Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 45° y 74° respectivamente. Calcule la altura del globo.

II) Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto C de la orilla opuesta; las visuales forman con la dirección de la orilla unos ángulos de 45° y 60°, respectivamente. Calcule la anchura del río sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 30 m.

III) Un barco A pide socorro y las señales son recibidas por dos estaciones de radio B y C que distan entre sí 80 km. La recta que une B y C forma con la dirección Norte un ángulo de 45°. B recibe señales con una dirección de 135° con el Norte, mientras que C las recibe con una dirección de 105°con el Norte. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

IV) Calcule la longitud que debe tener una escalera en una planta fabril para que su altura sea 4 m y el ángulo con el plano del piso sea 59º 01'.

V) Un ingeniero agrónomo necesita conocer el ancho de un río para definir las parcelas de siembra. Para ello un topógrafo coloca un teodolito en un punto A de la margen derecha del río, apuntándolo hacia el punto B en la margen opuesta. Luego camina 400 m de A hacia C, si el ángulo con el que ve el punto B es 28º¿cuál es el ancho del río?

VI) La estructura molecular del agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. ¿Cuál es el ángulo formado por los enlaces?

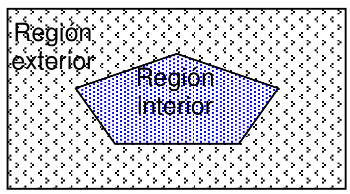
UNIDAD 6

FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

Figuras y Polígonos

Si se considera un multilátero simple cerrado, este divide al plano en dos regiones: una interior y otra exterior. Una **figura geométrica** puede definirse como el conjunto de puntos que constituyen a ese multilátero (es la frontera o elemento de separación).

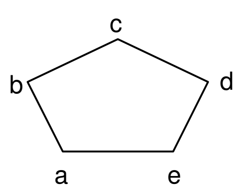


Se define a un **polígono** (*poli*: muchos y *gonos:* ángulos) como el conjunto de puntos de una poligonal cerrada y todos los puntos interiores a ella.

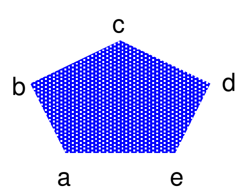
En el esquema que sigue se puede observar a abcde como un multilátero simple cerrado (es una figura).

La región interior se denomina **polígono abierto**.

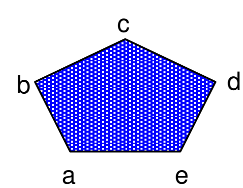
La unión del polígono abierto y el multilátero se denomina **polígono cerrado abcde.**



Multilátero abcde



Polígono abierto abcde



Polígono cerrado abcde

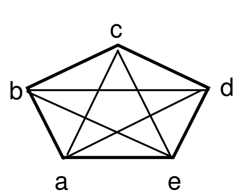
Elementos de un polígono

Las características de un polígono dependen de la posición de los puntos a, b, c, d, e que se denominan **vértices**.

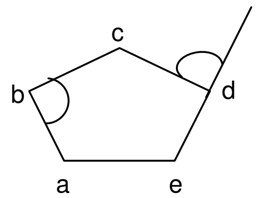
Los segmentos determinados por pares de vértices consecutivos se denominan **lados** del polígono.

Son lados del polígono abcde: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$ y $\overline{ea}$

Los segmentos determinados por pares de vértices no consecutivos se denominan **diagonales**.



Son diagonales del polígono abcde: $\overline{ac}, \overline{ad}, \overline{bd}, \overline{be}, \overline{ce},$



Angulo interior: ángulo formado por dos lados consecutivos considerando sean también puntos interiores del polígono.

Angulo exterior: esta formado por uno de los lados de la poligonal y la prolongación del consecutivo.

Clasificación de los polígonos según el número de lados

Los polígonos reciben nombres particulares de acuerdo con el número de lados que presenten:

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	9	Eneágono
4	Cuadrángulo	10	Decágono
5	Pentágono	11	Undecágono
6	Exágono	12	Dodecágono
7	Eptágono	15	Pentadecágono
8	octógono	20	icoságono

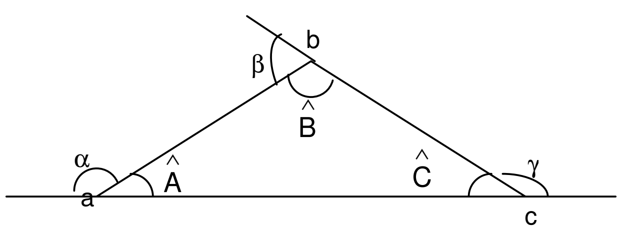
Polígonos regulares

Si un polígono tiene sus lados y sus ángulos congruentes se denomina **polígono regular.** Como ejemplos se verán triángulos y cuadriláteros.

Triángulos

Los triángulos son polígonos de tres lados.

Los elementos de un triángulo son los siguientes:

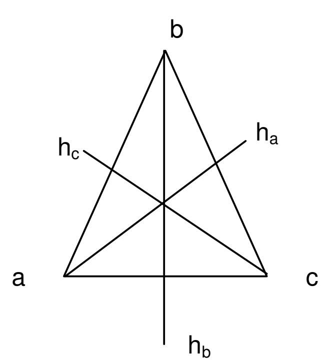


Vértices: a, b, c

Lados: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$

Angulos interiores: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Angulos exteriores: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$



La **altura** h es un elemento secundario importante e útil para la resolución de una serie de situaciones problemáticas.

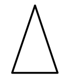
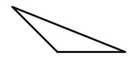
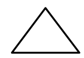
Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican: según sus lados y según sus ángulos.

Según sus ángulos:

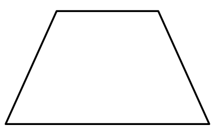
- Acutángulo: tiene sus tres ángulos congruentes.
- Rectángulo: tiene un ángulo recto
- Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.

Según sus lados:

- Isósceles: tiene por lo menos dos lados congruentes 
- Escaleno: no tiene lados congruentes. 
- Equilátero: tiene los tres lados congruentes 

Cuadriláteros

Los cuadriláteros son multiláteros de 4 lados, de acuerdo con sus características se distinguen los siguientes cuadriláteros especiales:



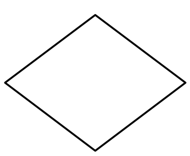
Trapecio: es todo cuadrilátero que tiene <u>por lo menos</u> un par de lados paralelos

Los lados paralelos se denominan **bases.**

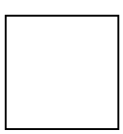
Paralelogramo: es un trapecio con los dos pares de lados paralelos.

Rectángulo: es todo cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos.

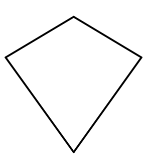
El rectángulo es también paralelogramo y trapecio rectángulo isósceles.



Rombo: es todo cuadrilátero que tiene sus lados congruentes.



Cuadrado: es todo cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos congruentes.



Romboide: es todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.

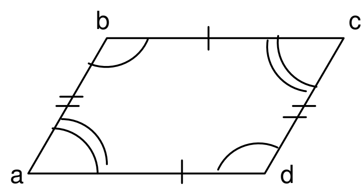
Propiedades de los lados y de los ángulos

Trapecio

Tiene un par de lados paralelos

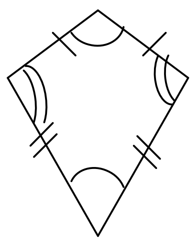
<u>Trapecio rectángulo</u>: tiene además un par de ángulos rectos.

<u>Trapecio isósceles</u>: además los lados distintos de las bases son congruentes y los ángulos adyacentes a cada base son congruentes.



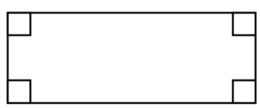
Paralelogramo

Cumple la propiedad de los trapecios y además por definición en todo paralelogramo los lados opuestos son paralelos. Además, en todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes y los ángulos opuestos son congruentes.



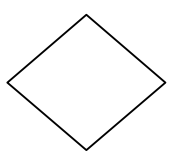
Romboide

Todo romboide tiene dos pares de lados consecutivos congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.



Rectángulo

Todo rectángulo además de las propiedades enunciadas para trapecios y paralelogramos tiene sus ángulos congruentes y son rectos.



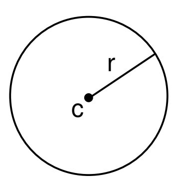
Rombo

Un rombo es un paralelogramo y un romboide por lo tanto cumple contadas las propiedades de estos cuadriláteros y además tiene sus lados congruentes.

El **cuadrado** cumple con todas las propiedades de los lados y ángulos enunciadas para las distintas clases de cuadriláteros.

Circunferencia

La circunferencia de centro c y radio r se define como el conjunto de puntos del plano cuya distancia c es igual a r.



Perímetros y Areas de polígonos

Perímetros

Perímetro de un polígono

Se llama perímetro de un polígono a la suma de los lados del mismo.

Por ejemplo, el perímetro del polígono abcde es:

$$\text{Per. abcde}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}$$

Perímetro de un polígono regular

En un polígono regular, todos los lados son iguales, por lo tanto el perímetro es igual al producto de la longitud de uno de los lados (L) por el número de lados (n).

$$\text{Per. Polígono regular} = n\ .\ L$$

Perímetro de una circunferencia de radio r y diámetro D es:

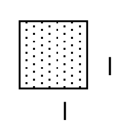
$$\text{Per. Circunferencia}= 2\pi.r= \pi.\ D$$

Áreas

- ✓ **Área del rectángulo**: es el producto de la longitud de su base b por la longitud de su altura h.

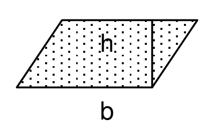
Area rectángulo= b . h

- ✓ **Área del cuadrado**: como la base es igual a la altura



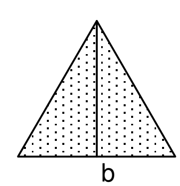
Area cuadrado= l^2

- ✓ **Área del paralelogramo:** como un paralelogramo es equivalente a un rectángulo que tenga base y altura congruentes



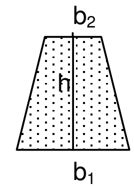
Area paralelogramo = b . h

- ✓ **Área del triángulo**: como un triángulo es equivalente a un paralelogramo que tiene la misma altura h y cuya base sea igual a la mitad de la base de un triángulo.



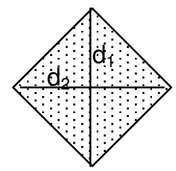
Area triángulo = $\frac{1}{2}b.h$

- **Área del trapecio**: como un trapecio es equivalente a un triángulo que tiene la misma altura h y cuya base sea igual a la suma de la bases del trapecio.



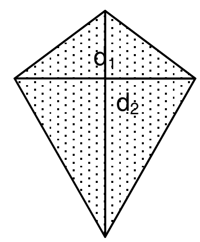
$$\textbf{Area trapecio} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$$

- **Área del rombo: se consideran las diagonales d1 y d2**.



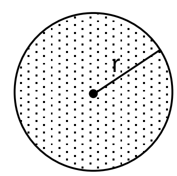
$$\textbf{Area rombo} = \frac{1}{2}(d_1.d_2)$$

- **Área del romboide**: se consideran las diagonales d_1 y d_2.



$$\textbf{Area romboide} = \frac{1}{2}(d_1.d_2)$$

- **Área del círculo**: considerando radio r



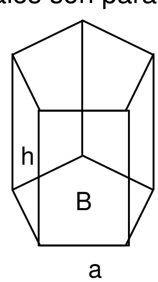
$$\textbf{Area círculo} = \pi r^2$$

Cuerpos geométricos

Las áreas (A) y volúmenes (V) de los mas utilizados cuerpos geométricos se detallan a continuación.

Prisma

Cuerpo geométrico cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos.



Superficie = Área lateral + área de las bases superior e inferior

Si se llama B al área de la base, y el área lateral de cada una de las 5 caras es $A_L = a.h$, entonces:

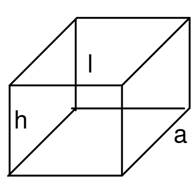
$$A_{prisma} = 5\ A_L + 2B$$

Volumen= Superficie de la base . altura

$$V_{prisma} = B.h$$

Ortoedro

Prisma cuyas bases son dos rectángulos.



Si l es el largo, a es el ancho y h la altura, entonces

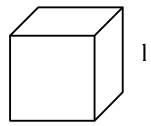
$$A_{ortoedro} = 2(ah + al + hl)$$

Volumen= Superficie de la base . altura

$$V_{prisma} = a\ .\ l.\ h$$

Cubo

Ortoedro en el que las tres dimensiones son iguales.

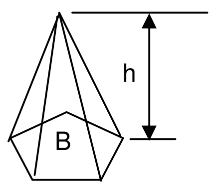


$A_{cubo}= 6\,l^2$

$V_{cubo}= l^3$

Pirámide

Cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triangulos.



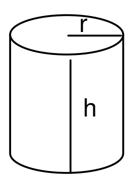
Si se llama B al área del polígono de n lados que constituye la base, y el área lateral de cada uno de los triángulos que forman sus n caras es A_L, entonces:

$A_{pirámide}= B + n\,A_L$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3}Bh$

Cilindro

Es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados



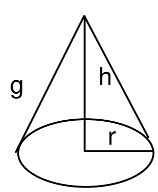
La superficie de la base B= πr^2 y el área lateral es $A_L= 2\pi r\,h$, entonces:

$A_{cilindro}= B + A_L=\pi r^2 + 2\pi r\,h$

$V_{cilindro} = \pi r^2\,h$

Cono

Es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus lados.



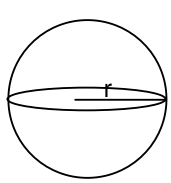
Siendo r el radio de la base, h la altura y g generatriz del cono

$A_{cono}= \pi r(g+r);\ g = \sqrt{h^2 + r^2}$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Esfera

Cuerpo geométrico engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.



Siendo r el radio

$A_{esfera}= 4\pi r^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Trabajo Práctico N° 8

Figuras y Cuerpos geométricos

1. Calcule la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12cm.

2. Determine el valor del perímetro y el área de los siguientes polígonos:
   a) Rectángulo cuyas dimensiones son b=6 m y h=14 m
   b) Cuadrado de lado l=6,25 cm
   c) Paralelogramo cuya base es 24 cm y la altura es la mitad de la base.
   d) Rombo cuyas diagonales son d_1=15,28cm y d_2= 7,85 cm

3. Calcule el área y el volumen de un ortoedro de dimensiones 4cm, 4cm y 18 cm, respectivamente.

4. Halle el área lateral total y el volumen de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 6 cm y la arista de la base 3 cm.

5. Halle el área total y el volumen de una pirámide cuadrangular regular cuyas aristas miden:
10 cm las de la base y 12 dm las laterales.

6. Un prisma cuadrangular regular tiene 10m de arista de la base y 15m de altura. Calcule la superficie lateral total y volumen.

7. Un prisma hexagonal regular tiene 25m de perímetro de la base y 2,85m de altura. Calcule su área total.

8. Calcular el volumen de un ortoedro de 3cm, 4cm y 6cm de arista.

9. Una pirámide cuadrangular regular tiene 6m de la arista de la base y 5m de arista lateral. Calcule su área total.

10. Calcule el volumen de una pirámide triangular regular de 8m de lado de la base y 3m de apotema lateral. (apotema: distancia al centro de cada lado)

11. El área total de una pirámide hexagonal regular es 225 m^2 y el perímetro de su base 36 m. Calcule su apotema lateral y su altura.

12. 30.- Determinar el área lateral y total de una pirámide hexagonal regular de 36 cm de lado y 3m de apotema de la base.

13. ¿Cuál será la superficie lateral del cilindro engendrado por un segmento de 4,5 cm de longitud al girar alrededor de un eje paralelo a él y del que dista 3,5 cm.

14. Un rectángulo de 4m de base y 3m de altura gira alrededor de ésta. Calcular la superficie
total del cilindro engendrado.

15. Un triángulo rectángulo de 3cm de base y 2cm de altura gira alrededor de esta. Calcular la superficie total del cono engendrado.

16. Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular de $38m^2$ de área lateral y $46m^2$ de área total.

17. Calcular la superficie total y volumen de una esfera que tiene un diámetro de 44 cm.

18. Calcule el volumen de los siguientes cuerpos:
a) Prisma cuadrangular de 6 cm de lado y 22 cm de altura.
b) Cilindro de de 6 cm de radio y 28 cm de altura.
c) Cono de 3 cm de radio y 10 cm de altura
d) Pirámide triangular, lado de la base 4,5 cm, altura 12 cm.

Problemas de aplicación

I) Un depósito en forma ortoédrica tiene una capacidad de 6000l. Si mide 6,75 m de largo y 3,8 m de ancho, calcule su altura

II) Calcule cuántos litros de agua caben en un depósito de forma esférica y que tiene 1m de radio.

III) ¿Cuánto pesa una esfera de hierro maciza que tiene 0,5 m de radio?

Datos: densidad del hierro=7,8

IV) Calcule cuántos litros de agua caben en un depósito de forma ortoédrica de dimensiones 20m, 10m y 5m

V) Calcule la cantidad de calor que hay que suministrar a una piscina de 15m de longitud, 6m de ancho y 3m de altura, si el agua está a 28 ºC para que se incremente en 2 ºC.

VI) En una fábrica de helados se fabrican cucuruchos de 6 cm de diámetro y 12 cm de altura. Si el cono se llena con helado y sobresale 8 cm del borde, siendo su nuevo diámetro 8 cm, indique el volumen de helado que se necesita para elaborar cada unidad individual.

VII) Una fábrica cuenta con un depósito de leche pasteurizada de forma cilíndrica, cuyas dimensiones son 2 m de diámetro y 3 m de largo, ¿Cuántas cajas Tetrabrik de 1 l pueden llenarse con el volumen de este depósito?

Bibliografía

- Tapia, N. 1989. Matemática 1.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 2.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 3.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 4.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Avila, M.; Rafael, B. 2005. Cuadernillo de Matemáticas para el Ingreso 2005. Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE