MECÁNICA CLÁSICA

CINEMATICA

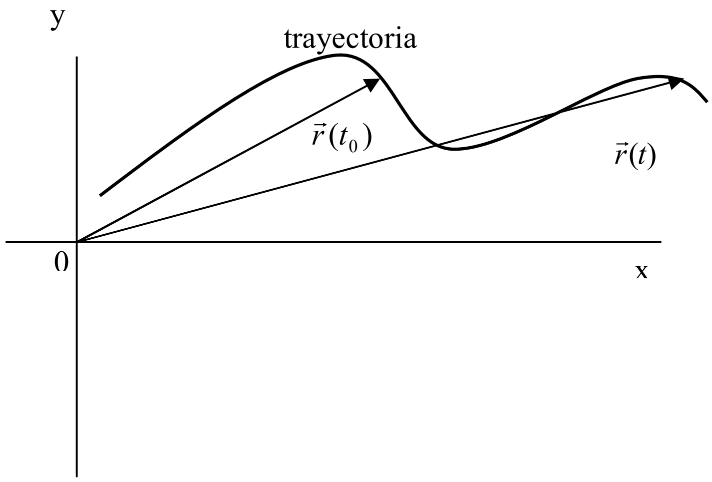
La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos, sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Antes de continuar establezcamos la diferencia entre un cuerpo y una partícula; el cuerpo posee masa (cantidad de materia) y dimensiones físicas las cuales corresponden con la forma de cuerpo (largo, ancho, espesor), mientras que la partícula es la simplificación del cuerpo, ya que tiene su masa pero no posee dimensiones físicas, o sea una partícula es un cuerpo sin dimensiones.

Para describir el movimiento de una partícula, lo primero que debemos considerar, es elegir un sistema de referencia respecto del cual vamos a describir el movimiento. A partir de este sistema de referencia, podemos indicar la posición de la partícula en función del tiempo usando el vector posición en coordenadas cartesianas

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Los puntos que va describiendo el vector posición en el espacio se denominan la trayectoria de la partícula.



La velocidad de la partícula es la derivada del vector posición respecto del tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

y es un vector tangente a la trayectoria. La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

la aceleración tiene tanto componentes tangenciales como componentes normales a la velocidad y a la trayectoria.

Si se conoce como varía la aceleración en función del tiempo para una partícula, y además sabemos su velocidad y posición para un tiempo t_0 (condiciones iniciales), podemos encontrar la velocidad y la posición del cuerpo en función del tiempo

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right] dt$$

DINÁMICA

La dinámica estudia la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas de este movimiento. El movimiento de un cuerpo es el resultado directo de sus interacciones con los otros cuerpos que lo rodean; las interacciones se describen convenientemente por un concepto matemático denominado fuerza.

La primera ley de Newton dice que un cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (la trayectoria es una recta y la velocidad del cuerpo se mantiene constante), a no ser que actúe una fuerza sobre él.

La segunda ley de Newton nos da la relación entre la fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración que éste adquiere, si la masa del cuerpo se mantiene constante

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La tercera ley de Newton dice que cuando dos partículas interactúan, la fuerza sobre una partícula es igual y opuesta a la fuerza sobre la otra.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Algunos ejemplos de fuerzas son:

- la fuerza de atracción gravitacional de la tierra, para cuerpos cercanos a la superficie terrestre, comúnmente denominada fuerza de gravedad, nos da el peso del cuerpo el cual es igual a la masa del cuerpo por la aceleración gravedad $\vec{g}$, que tiene un valor de 9,8 m/s^2 y apunta hacia el centro de la tierra

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

- la fuerza elástica debida a un resorte, que es igual al producto de la constante elástica del resorte (característica de cada resorte) por el estiramiento del mismo cambiado de signo, esto indica que la fuerza elástica se opone al estiramiento

$$\vec{F}_e = -K(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

donde $\vec{r}_0$ es el vector posición de equilibrio del resorte

- la fuerza eléctrica producida por un campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una partícula cargada con carga q

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

- la fuerza magnética producida por un campo magnético $\vec{B}$ sobre una partícula cargada con carga q y velocidad $\vec{v}$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

PRINCIPIOS DE CONSERVACIÓN

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Se define cantidad de movimiento lineal o momentum lineal de una partícula al producto de su masa por la velocidad de la misma

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es la fuerza aplicada sobre la partícula

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

si la masa es constante, lo que obtenemos es la segunda ley de Newton.

Integrando esta expresión

$$\int_{\vec{p}_0}^{p} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt$$

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = \vec{I}$$

Donde $\vec{I}$ se llama impulso de la fuerza, se puede concluir que el cambio del momentum de una partícula es igual al impulso de la fuerza que actuó sobre la partícula. Si la fuerza es constante en el tiempo, el impulso es igual al producto de la fuerza, por el intervalo de tiempo durante el cual actúa la fuerza.

Cuando tenemos un sistema de varias partículas, la cantidad de movimiento lineal del sistema es la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + ... = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas se conserva, si la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema es cero.

Esto nos dice que la cantidad de movimiento total inicial es igual a la cantidad de movimiento total final

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

TRABAJO

Consideremos una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria cualquiera bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$, y tengamos en cuenta intervalos de tiempos pequeños dt de tal forma que el camino recorrido por la partícula coincida con el desplazamiento $d\vec{r}$; definimos al trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ durante el desplazamiento como

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

El trabajo total de realizado por la fuerza $\vec{F}$ entre los puntos A y B de una trayectoria es

$$w = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ENERGÍA

ENERGÍA CINÉTICA

Se define como energía cinética de una partícula a la cantidad

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{o} \quad E_c = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{m}$$

la variación de la energía cinética de una partícula entre un estado final y uno inicial es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas sobre la partícula

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = w$$

ENERGIA POTENCIAL

En la naturaleza existen ciertas fuerzas que se denominan fuerzas conservativas, estas fuerzas se caracterizan porque el trabajo realizado por ellas no depende del camino, sino que dependen del punto inicial y final de la trayectoria. Otra propiedad de estas fuerzas es que se pueden escribir como menos el gradiente de una función del vector posición, a esa función se la denomina energía potencial $E_p(\vec{r})$

$$\vec{F}_{con} = -\nabla E_p(\vec{r})$$

La fuerzas de atracción gravitacional y la fuerza elástica son fuerzas conservativas, cada una asociada a su respectiva energía potencial.

Para la fuerza de gravedad la energía potencial gravitatoria es

$$E_p = mgz$$

donde z es la altura de la partícula respecto de la superficie terrestre.

Para la fuerza elástica la energía potencial elástica es

$$E_p = \frac{1}{2}K\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|^2$$

Para fuerzas eléctricas donde el campo eléctrico lo produce una carga puntual q_1 que actúa sobre otra carga q_2, las cuales están separadas una distancia r, la energía eléctrica es

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|}$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La suma de la energía cinética y potencial de una partícula se denomina energía total o energía mecánica

$$E = E_c + E_p$$

La energía mecánica de un sistema de partículas se conserva si las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas.

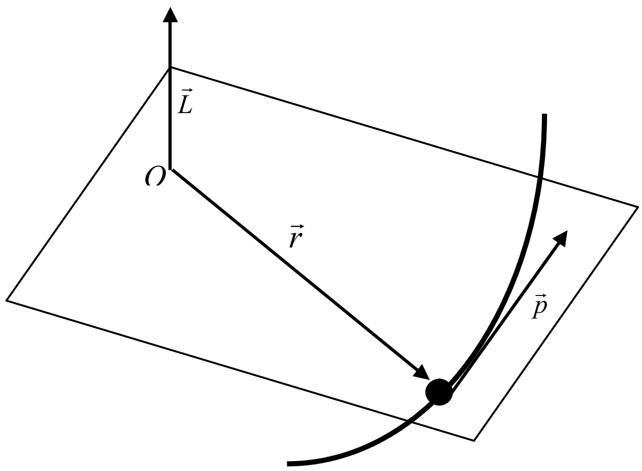
Esto nos dice que la energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial

$$E_f = E_i$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Se define cantidad de movimiento angular o momentum angular con respecto a un punto *O* de una partícula de masa *m* que posee una cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$, al producto vectorial del vector posición de la partícula respecto del punto *O* por la cantidad de movimiento lineal de la partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$



La derivada de la cantidad de movimiento angular respecto del tiempo de una partícula es el torque de la fuerza aplicada sobre ella

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Para un sistemas de varias partículas la cantidad de movimiento angular del sistema es la suma de las cantidades de movimiento angular de cada partícula

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ... = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

La derivada de la cantidad de movimiento angular respecto del tiempo de un sistema de partículas es el torque de las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ex} = \vec{r} \times \vec{F}_{ex}$$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

La cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas se conserva, si el torque de la resultante de las fuerzas externa que actúan sobre el sistema de partículas es cero.

Esto nos dice que la cantidad de movimiento angular inicia del sistema es igual a la cantidad de movimiento angular final del sistema

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

LANGRANGIANO

Para un sistema de n partículas en el espacio se necesitan $3n$ coordenadas cartesianas, para definir la posición de las n partículas; si se quiere especificar el estado total del sistema debemos conocer la $3n$ velocidades de las partícula o sea

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots\ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots\ldots., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)$$

Formular el problema en coordenadas cartesianas puede llegar a ser engorroso, por lo tanto conviene elegir otro mucho más simple, entonces es conveniente elegir un sistema de coordenadas generalizadas q_i y velocidades generalizadas $\dot{q}_i = \frac{dq}{dt}$, donde i varía de 1 hasta 3n.

Se define luego la función de Lagrange o Lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q})$, donde q es el conjunto de la i coordenadas generalizadas y $\dot{q}_i$ el conjunto de la i velocidades generalizadas.

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q}) - V(q,\dot{q},t)$$

Donde T es la energía cinética del sistema y V la energía potencial.

Para sistemas conservativos tanto $\mathcal{L}$ como V no son funciones explícitas del tiempo.

ECUACIONES DE LAGRANGE

Las ecuaciones de movimiento, en término del Lagrangiano son ahora:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) = 0$$

donde obtenemos $3n$ ecuaciones diferenciales de 2º orden, las cuales describen al sistema de partículas. El conjunto de estas $3n$ se conocen como ecuaciones de Lagrange.

HAMILTONIANO

Las $3n$ ecuaciones de Lagrange se pueden transformarse en $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en la forma de Hamilton. Para definir el Hamiltoniano. Definamos primero el momento generalizado como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Luego definimos a la función de Hamilton o Hamiltoniano, $\mathcal{H}$ como:

$$\mathcal{H} = \sum_{1}^{3n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Para el caso de un sistema de fuerzas conservativo

$$\mathcal{H} = T + V$$

o sea que el Hamiltoniano corresponde a la energía total de un sistema conservativo

ECUACIONES DE HAMILTON

Las ecuaciones de movimiento para un sistema conservativo en la forma de Hamilton resultan ser

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Estas son las ecuaciones de Hamilton que forman un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

ESPACIO DE CONFIGURACIÓN

Cuando tenemos un sistema de n partículas sobre las cuales existen m restricciones de movilidad sobre algunas de las $3n$ coordenadas cartesianas, el sistema queda completamente determinado por s coordenadas generalizadas donde $s = 3n - m$. Luego, es posible describir el estado del sistema por un punto en el espacio s-dimensional, denominado espacio de configuración, donde cada una de las dimensiones corresponde a una coordenada generalizada q_i. La evolución temporal del sistema puede ser representada por una curva en el espacio de configuraciones, formada por los puntos que describen la configuración instantánea del sistema.

ESPACIO DE LA FASE

El espacio de la fase, es un espacio de $2s$ dimensiones, cuyos ejes son las s coordenadas generalizadas y los s momentos generalizados de un sistema dado. Cada punto de este espacio corresponde a un estado mecánico definido del sistema. Cuando el sistema está en movimiento, el punto representativo en el espacio de la fase describe una curva denominada trayectoria de la fase.