Examen de Análisis Matemático I – Matemática II – Libres - Agosto 2007

Nombre y Apellido: ………………………………………………………………………

Parte Práctica: Los alumnos deberán resolver bien los ejercicios de integrales y derivadas para que se evalúe el resto del examen. En caso contrario, se dará por desaprobada la parte práctica, y no se corregirá la teoría.

1) Evalúe las siguientes integrales: (2,50p)

$a)\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx =$ $\quad b)\int \frac{2}{x^3+x^2-2x}dx =$ $\quad c)\int \cos x\ (2-senx)^5\ dx =$ $\quad d)\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}dx =$

2) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+\cos x}\right)$ b) $x^2y^3-2x+5y^2=2$ (1,50p)

3) Resuelva la siguiente desigualdad y grafique el conjunto solución: $|3x+1|\leq 2x+3$ (0,25p)

4) Determine el valor de a y b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio. Grafique.

$$f(x)=\begin{cases} ax-1 & si\ x<2 \\ 1 & si\ x=2 \\ bx^2 & si\ x>2 \end{cases}$$ (0,50p)

5) a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-1$ y paralela a la recta $8x-2y=0$

b) Halle la ecuación de la recta normal a la curva en dicho punto.

c) Grafique la función, la recta tangente y la recta normal. (0,75p)

6) Dada la función $f(x)=\frac{x^3}{3}-9x+2$, halle: a) intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, concavidad y punto de inflexión. Grafique. (0,75p)

7) Halle el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x)=2-x^2$ y $y=-x$.
. (1p)

8) a) Dada la sucesión $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ indique cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo. Diga si es convergente, divergente u oscilante y calcule su límite.

b) Estudie la convergencia de las siguientes series:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ (2p)

9) Dada la siguiente proposición:

"Si vienes y me ayudas, terminaré rápido el trabajo"

a) Traduce al lenguaje simbólico. Indica cuáles son las proposiciones simples y los conectivos.

b) Indica si es una tautología, contradicción o contingencia.

c) Escribe en forma simbólica los condicionales asociados y luego traduce al lenguaje coloquial. (0,75p)

Parte Teórica

1) A) ¿Es posible obtener proposiciones a partir de funciones proposicionales?. Si la respuesta es sí, dé ejemplos y si es no, establezca la razón.

B) Dé la definición de ley lógica. Enuncie por lo menos tres leyes lógicas.

2) A) Escriba la definición formal de límite. Haga una representación gráfica donde aparezcan los elementos ε y δ.

B) Enuncie y demuestre el teorema del encaje.

C) Indique si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas. Justifique su respuesta en cada caso. Para ello dé el nombre y enuncie el teorema que justifica su decisión.

- Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] tal que f(a) es positivo y f(b) es negativo, entonces existe al menos un c $\in$ (a, b) tal que f(c) = 0.
- Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y si x toma todos los valores entre a y b, entonces f(x) tiene que tomar todos los valores entre f(a) y f(b). (1,75p)

3) A) Pruebe que la función $f(x) = |x+3|$ no es derivable en x = - 3.

B) Enuncie y demuestre la regla de la derivada de la suma de dos funciones. (1p)

4) Invente un ejemplo de una función para la cuál:

A) f(a) no existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

B) f(a) existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

C) tanto f(a) como $\lim_{x \to a} f(x)$ existen, pero no son iguales. (0,75p)

5) A) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de la función f en x = c?

B) ¿Es posible que una función sea diferenciable en un número y no sea continua en ese número?. Si la respuesta es sí, dé un ejemplo y si es no, establezca la razón.

C) ¿Es posible que una función sea continua en un número y no sea diferenciable en ese número?. Si la respuesta es sí, dé un ejemplo y si es no, establezca la razón.

D) Establezca tres razones por las que una función no sea diferenciable en un número c y dibuje la gráfica de tal función en cada caso. (1,50p)

6) A) Enuncie una propiedad o teorema que vincula la derivada de una función y de su inversa y luego demuestre.

B) Explique la diferencia entre extremos absolutos y relativos de una función.

C) Enuncie y demuestre el teorema de la función creciente. (1,25p)

7) Enuncie, proporcione una interpretación geométrica y demuestre el teorema del valor medio del cálculo diferencial. (0,75p)

8) A) ¿Qué es una suma de Riemann? Invente un ejemplo para ilustrar este concepto.

B) Enuncie, proporcione una interpretación geométrica y demuestre el teorema del valor medio del cálculo integral.

C) Enuncie y demuestre el segundo teorema fundamental del cálculo integral. (2p)

Examen de Análisis Matemático I – Matemática II – Regulares - Agosto 2007

Nombre y Apellido: ………………………………………………………………………

Parte Práctica: Los alumnos deberán resolver bien los ejercicios de integrales y derivadas para que se evalúe el resto del examen. En caso contrario, se dará por desaprobada la parte práctica, y no se corregirá la teoría.

1) Evalúe las siguientes integrales: (2,75p)

$a)\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=$ $\quad b)\int \frac{2}{x^3+x^2-2x}dx=$ $\quad c)\int \cos x\ (2-senx)^5\ dx=$ $\quad d)\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}dx=$

2) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+\cos x}\right)$ $\qquad$ b) $x^2y^3-2x+5y^2=2$ $\qquad$ (1,50p)

3) a) Halle el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x)=2-x^2$ y $y=-x$.

b) Halle un rectángulo cuya área sea igual al área de la región bajo la curva $f(x)=x^2+1\ en\ [1,3]$. (1,75p)

4) a) Dada la sucesión $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ indique cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo. Diga si es convergente, divergente u oscilante y calcule su límite.

b) Estudie la convergencia de las siguientes series:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ $\qquad$ (2,50p)

5) Dada la siguiente proposición:

“Si vienes y me ayudas, terminaré rápido el trabajo”

a) Traduce al lenguaje simbólico. Indica cuáles son las proposiciones simples y los conectivos.

b) Indica si es una tautología, contradicción o contingencia.

c) Escribe en forma simbólica los condicionales asociados y luego traduce al lenguaje coloquial. (1,50p)

Parte Teórica

1) A) ¿Es posible obtener proposiciones a partir de funciones proposicionales?. Si la respuesta es sí, dé ejemplos y si es no, establezca la razón.

B) Dé la definición de ley lógica. Enuncie por lo menos tres leyes lógicas.

C) Haga una tabla de conectivos lógicos, operaciones y significado. (1p)

2) A) Escriba la definición formal de límite. Haga una representación gráfica donde aparezcan los elementos ε y δ.

B) Enuncie y demuestre el teorema del encaje.

C) Indique si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas. Justifique su respuesta en cada caso. Para ello dé el nombre y enuncie el teorema que justifica su decisión.

- Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] tal que f(a) es positivo y f(b) es negativo, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que f(c) = 0.
- Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y si x toma todos los valores entre a y b, entonces f(x) tiene que tomar todos los valores entre f(a) y f(b). (1,75p)

3) A) Pruebe que la función $f(x)=|x+3|$ no es derivable en x = - 3.

B) Enuncie y demuestre la regla de la derivada de la suma de dos funciones. (1p)

4) Invente un ejemplo de una función para la cuál:

A) f(a) no existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

B) f(a) existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

C) tanto f(a) como $\lim_{x \to a} f(x)$ existen, pero no son iguales. (0,75p)

5) A) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de la función f en x = c?

B) ¿Es posible que una función sea diferenciable en un número y no sea continua en ese número?. Si la respuesta es sí, dé un ejemplo y si es no, establezca la razón.

C) ¿Es posible que una función sea continua en un número y no sea diferenciable en ese número?. Si la respuesta es sí, dé un ejemplo y si es no, establezca la razón.

D) Establezca tres razones por las que una función no sea diferenciable en un número c y dibuje la gráfica de tal función en cada caso. (1,50p)

6) A) Enuncie una propiedad o teorema que vincula la derivada de una función y de su inversa y luego demuestre.

B) Explique la diferencia entre extremos absolutos y relativos de una función.

C) Enuncie y demuestre el teorema de la función creciente. (1,25p)

7) Enuncie, proporcione una interpretación geométrica y demuestre el teorema del valor medio del cálculo diferencial. (0,75p)

8) A) ¿Qué es una suma de Riemann? Invente un ejemplo para ilustrar este concepto.

B) Enuncie, proporcione una interpretación geométrica y demuestre el teorema del valor medio del cálculo integral.

C) Enuncie y demuestre el segundo teorema fundamental del cálculo integral. (2p)